L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 6

Abgabe am 6.6. vor der Übung

Aufgabe 13:
Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. f heißt in $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, falls

$$f'(z_0) = \lim_{\mathbb{C} \ni z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Zeigen Sie, dass aus der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0 die Stetigkeit von f in z_0 folgt.

Aufgabe 14: (Es reicht, wenn Sie (i) und einen weiteren Aufgabenteil bearbeiten)
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$

i) Zeigen Sie, dass auch die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

Konvergenzradius R haben.

ii) Umordnen von Potenzreihen: $z_1 \in \mathbb{C}$ erfülle $|z_1 - z_0| < R$. Verwenden Sie den Umordnungssatz, um zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Reihe

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k}$$

konvergiert, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k$$

konvergiert und dass dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

gilt.

iii) Es sei $U_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ und $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Zeigen Sie induktiv, dass f in jedem $z \in U_R(z_0)$ unendlich oft stetig komplex differenzierbar ist und dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} k! a_n (z - z_0)^{n-k} \quad (z \in U_R(z_0))$$

gilt. Insbesondere gilt dann $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

iv) Es existiere $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\liminf_{n_0 \leq n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_{n_0 \leq n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Aufgabe 15:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(n) z^n$,

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$,

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.