L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 7
Abgabe am 13.6. vor der Übung

Aufgabe 16:

i) Es seien $G_1 \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ und $G_2 \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{ix \in i\mathbb{R} : x \leq 0\}$. Berechnen Sie $\log^{G_1}(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i))$ und $\log^{G_2}(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i))$.

ii) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin G$ und $1 \in G$. Zeigen Sie, dass für jede zusammenhängende Teilmenge $W \subset \exp^{-1}(G)$ ein eindeutig bestimmtes $k_W \in \mathbb{Z}$ existiert, so, dass

$$\log^G(\exp(z)) = z + 2\pi i k_W$$

für alle $z \in W$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $k_W = 0$ falls $0 \in W$.

iii) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin G$ und $1 \in G$. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $g_\alpha : G \to \mathbb{C}$, $g_\alpha(z) = \exp(\alpha \log^G(z))$. Zeigen Sie

(a) g_α is holomorph, $g'_\alpha(z) = \alpha g_{\alpha-1}(z)$ und $g_\alpha(1) = 1$.

(b) Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $g_m(z) = z^m$.

(c) Ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gilt für alle $z \in G$ mit $\frac{\alpha}{n} \log^G(z) \in \exp^{-1}(G)$

$$g_n(g_{\alpha/n}(z)) = g_\alpha(z).$$

Mit (b) folgt also $(g_{\alpha/n}(z))^n = g_\alpha(z)$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $z \in G$ mit $\frac{\alpha}{n} \log^G(z) \in \exp^{-1}(G)$.

Wegen dieser Eigenschaften schreibt man auch $g_\alpha(z) = z^\alpha$. Die nächste Teilaufgabe zeigt, dass dabei Vorsicht geboten ist.

iv) Die folgende „Gleichung“ zeigt, dass die allgemeinen Potenzgesetze im Komplexen i.A. nicht gelten:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Wo liegt der Fehler?

Bemerkung: $\log^G$ sei im Folgenden stets so gewählt, dass $\log^G(1) = 0$.