L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie

Blatt 8

Abgabe am 20.6. vor der Übung

Aufgabe 17: Für $r > 0$ sei $B_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ und $U_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Es sei $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $U_r(0)$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to B_r(0)$, $\gamma(t) = re^{it}$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in U_r(0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Aufgabe 18: Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung gilt:

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \max_{z \in |\gamma|} |f(z)| \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt.$$

Aufgabe 19: Seien $r > 0$, $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $B_r(0) \subset U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = re^{it}$.

i) Zeigen Sie, dass für $a, b \in U_r(0)$ mit $a \neq b$ gilt

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta.$$

ii) Es seien nun speziell $r = 1$, $U = \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ sowie $|a| \neq 1$. Man berechne

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - a)(\zeta - \frac{1}{a})}.$$

iii) Man verwende (ii), um

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos(t) + a^2}$$

für $a \neq 0$ sowie $|a| \neq 1$ zu berechnen.

Aufgabe 20: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int\limits_{|z|=\pi} \frac{\cos z}{z} dz$,

ii) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz$,

iii) $\int\limits_{|z-3|=2} (\frac{z}{z-e})^n dz$, $n \in \mathbb{N}$.