L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 9

Abgabe am 27.6. vor der Übung

Aufgabe 21:

Erinnerung: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und f_n, $f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ Abbildungen. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lokal gleichmäßig konnvergent* gegen f (auf X), falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf U für $n \to \infty$.

Es sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph für alle $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeigen Sie: Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann gilt

   (a) f ist holomorph,

   (b) für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ auf G.

ii) Für $G := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ ist die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : G \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\zeta(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^z}.$$
Beweisen Sie, dass ζ holomorph in G ist. (Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass die Teilsummenfolge $s_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{e^{z \ln \nu}}$ lokal gleichmäßig auf G konvergiert.)

Aufgabe 22:

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Entwickeln Sie f in eine Potenzreihe um z_0 und bestimmen Sie den jeweiligen Konvergenzradius für $z_0 \in \{0, i, -2\}$.

Aufgabe 23:

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ und $G := \mathbb{C} \setminus \{ix : x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$.

i) Zeigen Sie, dass G sternförmig bezüglich 0 ist.

ii) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Funktion A gibt so, dass A holomorph ist in G, $A(0) = 0$ gilt und $A' = f$.

iii) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von A in $z_0 = 0$.

iv) Gibt es auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ eine Stammfunktion von f?

v) Zeigen Sie, dass $A(x) = \arctan(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Deswegen wird A *Hauptzweig des Arcustangens* genannt und ebenfalls mit arctan bezeichnet.

vi) Man zeige, dass im Gebiet $S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ für alle $z \in S$ gilt

$$\arctan(\tan z) = z.$$