

Wie kann ich Spiele gewinnen?

Eine Einführung in die Spieltheorie

Inhalt:

1. Spieltheorie
2. Spiele in “Baumform”
3. Spiele in “Normalform”
4. Wie spielen Computer?
5. Wir lernen neue Spiele

1. Was ist Spieltheorie?

Was für Spiele kennt Ihr?

Ich schreibe sie hier hin:

Go, Siedler von Catan, Mühle, Monopoly
Schach, GTAS, Skip-Bo, Elfer raus, Phase 10

Was sind Spiele überhaupt?

Wie würdet Ihr z.B. einem Außerirdischen erklären, was Spiele sind?

Was sind Spiele überhaupt?

Wie würdet Ihr z.B. einem Außerirdischen erklären, was Spiele sind?

Spiele haben folgende Eigenschaften:

- ▶ Bei Spielen gibt es mehrere Teilnehmer.
- ▶ Die Teilnehmer müssen Entscheidungen treffen.
- ▶ Die Entscheidungen haben Einfluss darauf, wie das Spiel jeweils weitergeht.
- ▶ Am Ende des Spiels gibt es einen Ausgang, z.B. hat ein Spieler gewonnen oder jeder Spieler gewinnt einen bestimmten Geldbetrag.

Spieltheorie

Warum untersuchen Wissenschaftler überhaupt Spiele?

Haben die nichts Ernsthaftes zu arbeiten?

▶ *Was meint Ihr?*

Spieltheorie und das „ernste Leben“



Universität Trier

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

- ▶ **Geschäfte**, die im Wettbewerb miteinander stehen.

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

- ▶ **Geschäfte**, die im Wettbewerb miteinander stehen.
- ▶ **Bewerber** um eine Arbeitsstelle.

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

- ▶ **Geschäfte**, die im Wettbewerb miteinander stehen.
- ▶ **Bewerber** um eine Arbeitsstelle.
- ▶ **Länder**, die miteinander zusammenarbeiten oder gegeneinander Krieg führen.

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

- ▶ **Geschäfte**, die im Wettbewerb miteinander stehen.
- ▶ **Bewerber** um eine Arbeitsstelle.
- ▶ **Länder**, die miteinander zusammenarbeiten oder gegeneinander Krieg führen.
- ▶ **Menschen**, die sich all gemeinsam umweltfreundlich verhalten – oder auch nicht.

Spieltheorie und das “ernste Leben”

So etwas wie “Spiele” gibt es immer, wenn Menschen etwas zusammen machen, Beispiele:

- ▶ **Geschäfte**, die im Wettbewerb miteinander stehen.
- ▶ **Bewerber** um eine Arbeitsstelle.
- ▶ **Länder**, die miteinander zusammenarbeiten oder gegeneinander Krieg führen.
- ▶ **Menschen**, die sich all gemeinsam umweltfreundlich verhalten – oder auch nicht.
- ▶ Und selbst **Sport** kann “ernst” sein, wenn es zum Beispiel um viel Geld geht!

2. Spiele in “Baumform”

(Bei denen alle schön der Reihe nach spielen)

Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

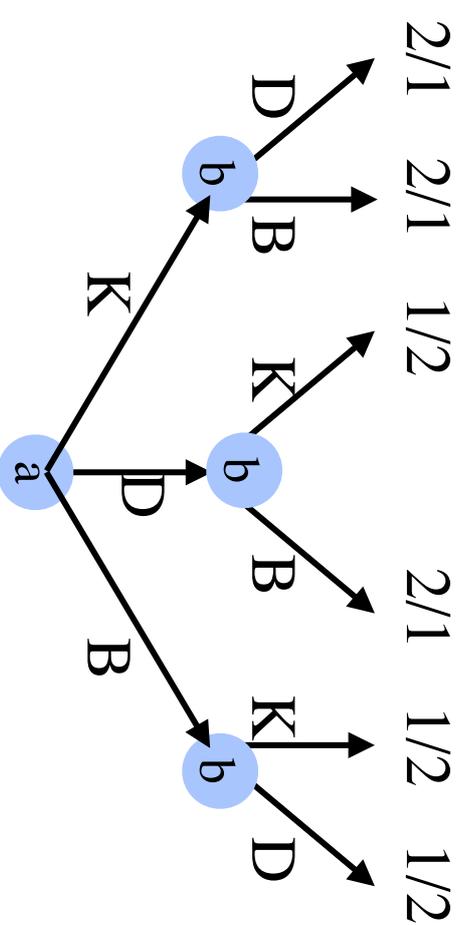
Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.

Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.

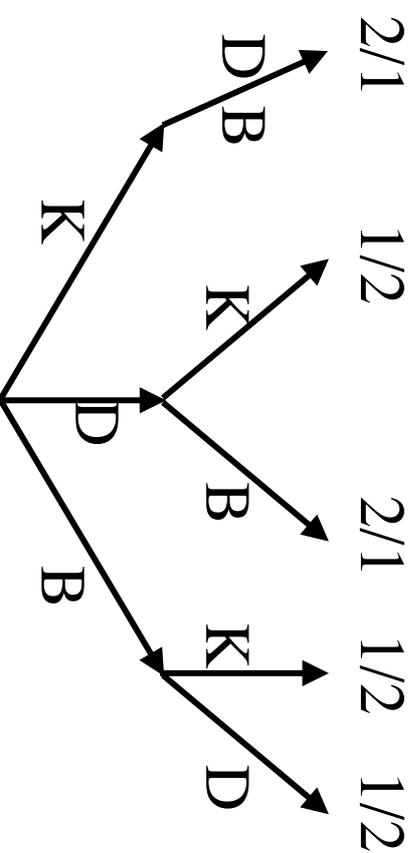


Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.

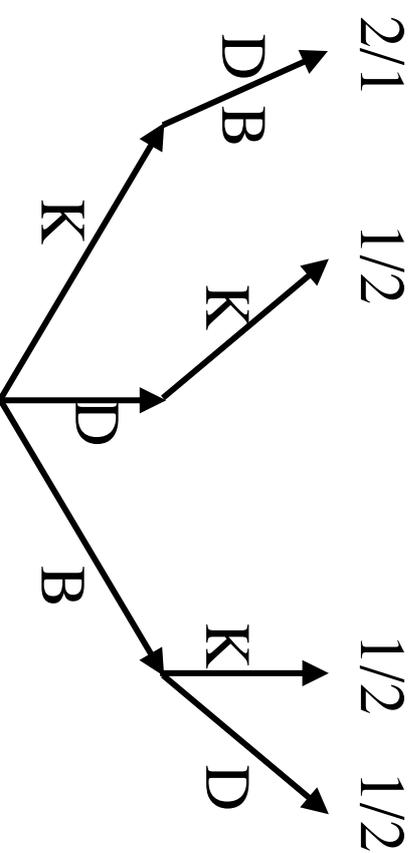


Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.

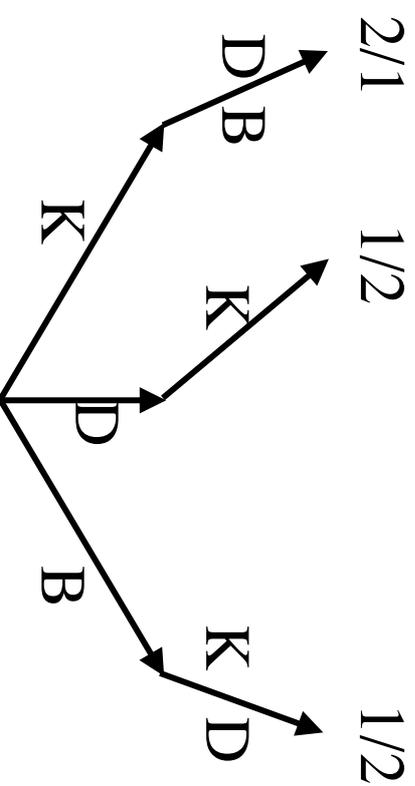


Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.

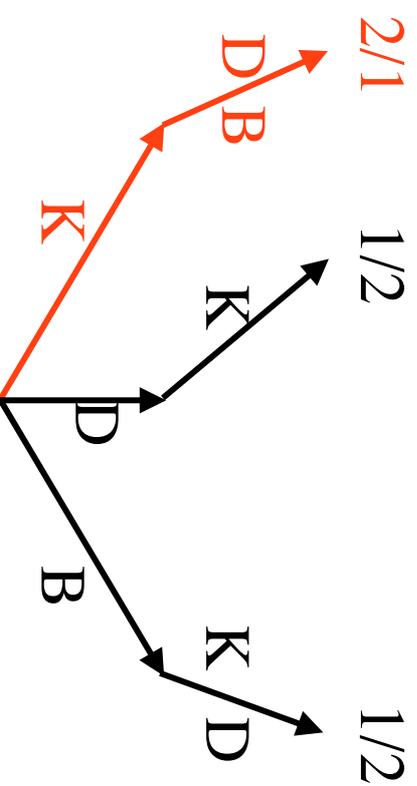


Ein Beispiel-Spiel

Es liegen drei Karten auf dem Tisch (B, D, K).

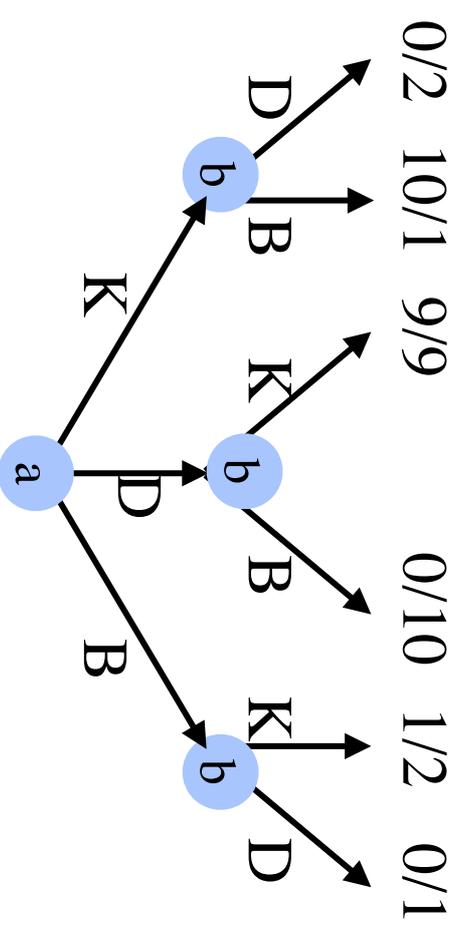
1. Spieler a nimmt eine Karte.
2. Spieler b nimmt eine Karte.

Am Ende bekommen beide Bonbons: Der mit der höheren Karte zwei, der andere eins.



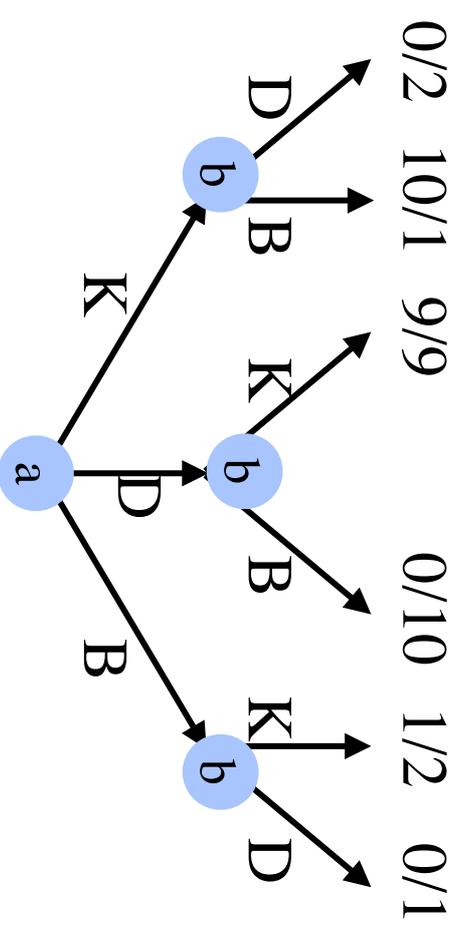
Zu einfach? Okay...

Jetzt bekommen beide so viele Bonbons:



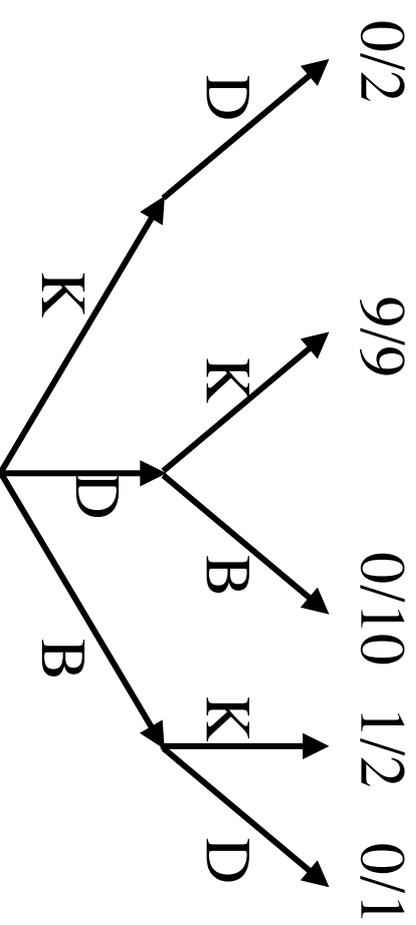
Optimale Strategie

Wir wenden einfach dieselbe Methode wie eben an:



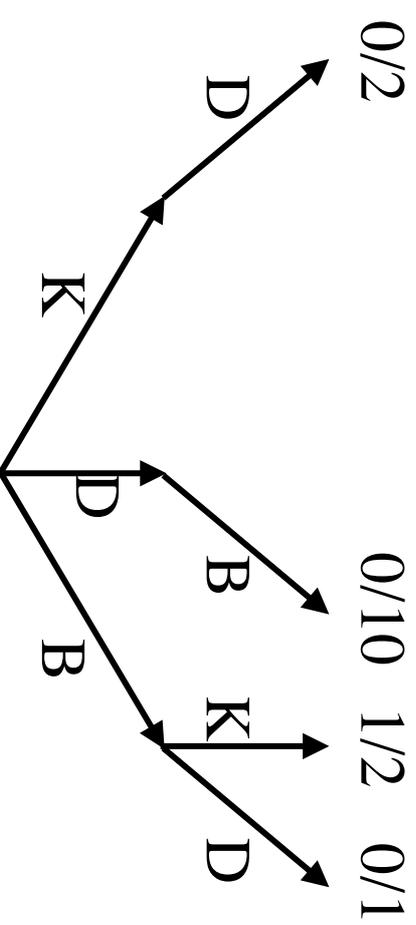
Optimale Strategie

Wir wenden einfach dieselbe Methode wie eben an:



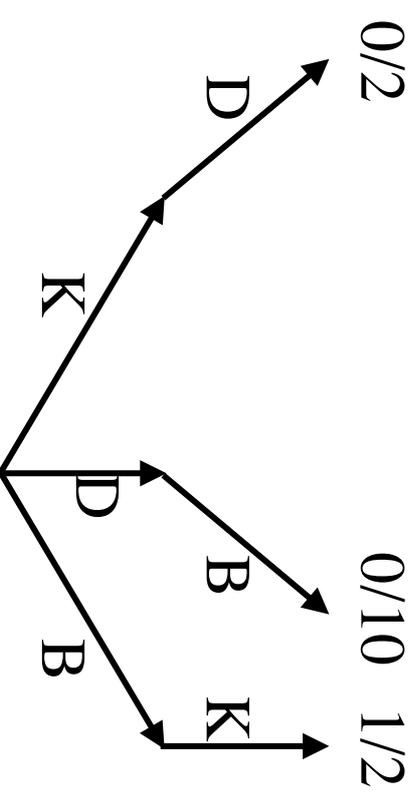
Optimale Strategie

Wir wenden einfach dieselbe Methode wie eben an:



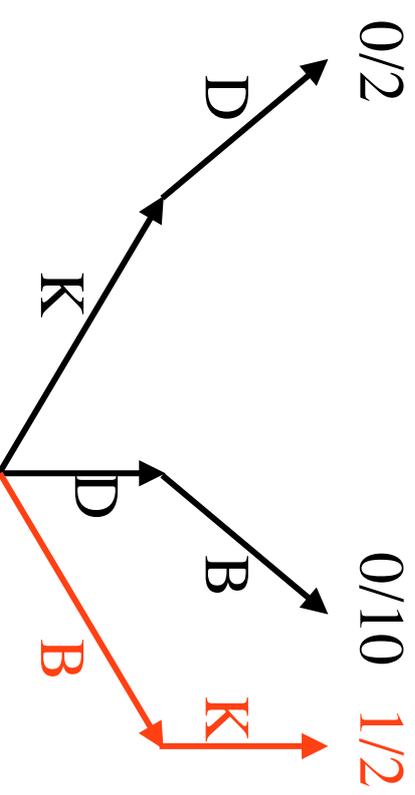
Optimale Strategie

Wir wenden einfach dieselbe Methode wie eben an:



Optimale Strategie

Wir wenden einfach dieselbe Methode wie eben an:



Noch ein Beispiel

1. Spieler A: Sagt eine Zahl von 1-3.
2. Spieler B: Sagt eine Zahl von 1-3, die noch nicht genannt wurde.

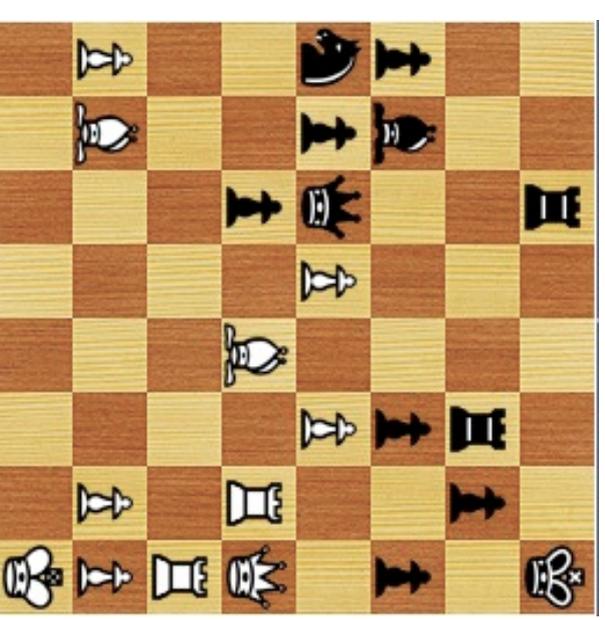
A gewinnt, wenn die Summe der Zahlen gerade ist.

B gewinnt, wenn die Summe der Zahlen ungerade ist.

- ▶ Könt Ihr den Spielbaum aufmalen?
- ▶ Und wer gewinnt das Spiel und wie?
- ▶ Wir schauen uns das dann gemeinsam an der Tafel an!

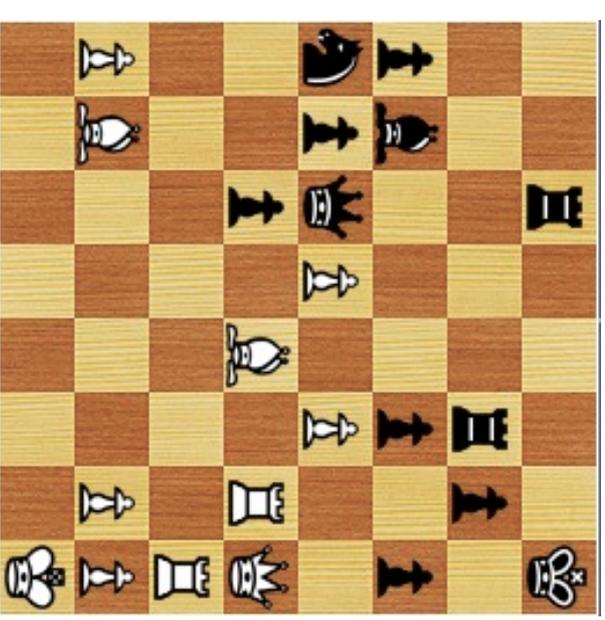


Schach



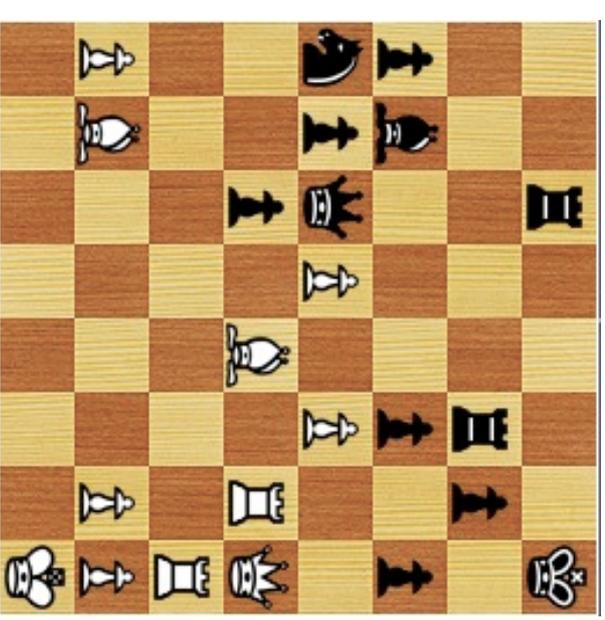
Schach

► Wer von Euch kann Schach spielen?



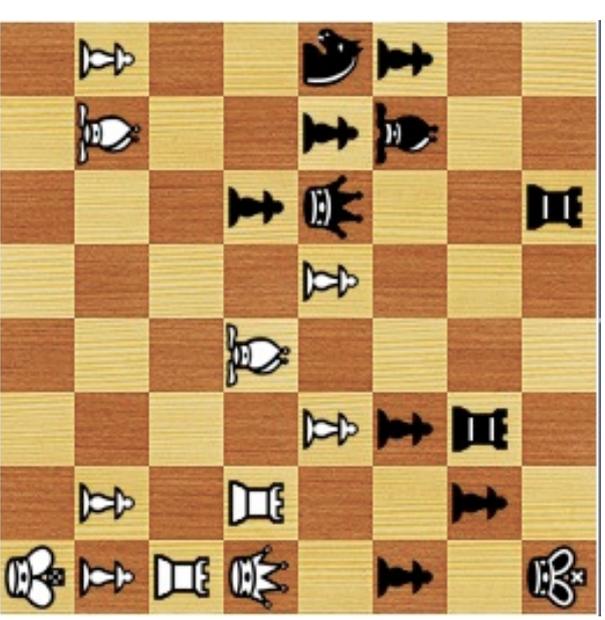
Schach

► Wer von Euch kann Schach spielen?



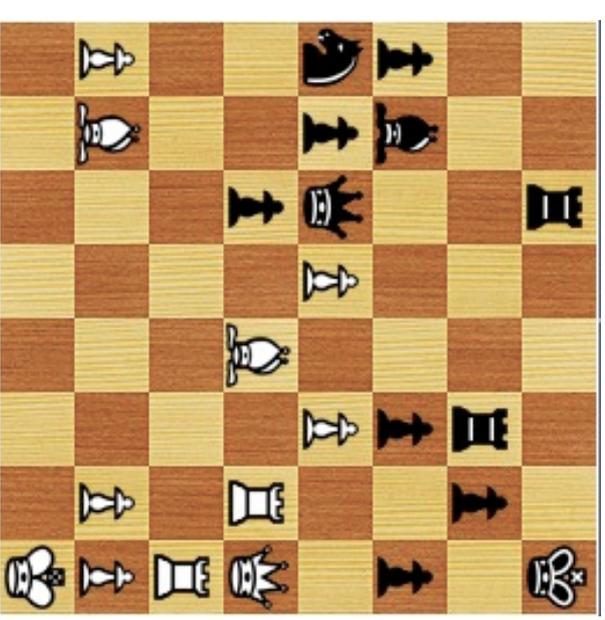
Schach

- ▶ Wer von Euch kann Schach spielen?
- ▶ Wer ist der beste Schachspieler hier?



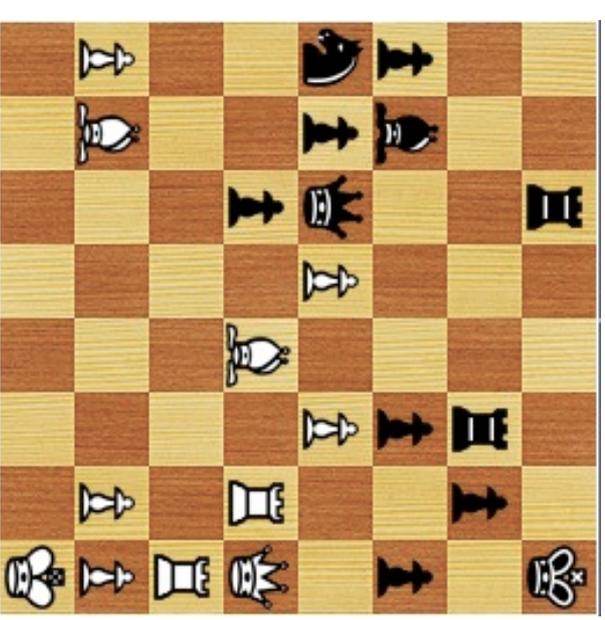
Schach

- ▶ Wer von Euch kann Schach spielen?
- ▶ Wer ist der beste Schachspieler hier?



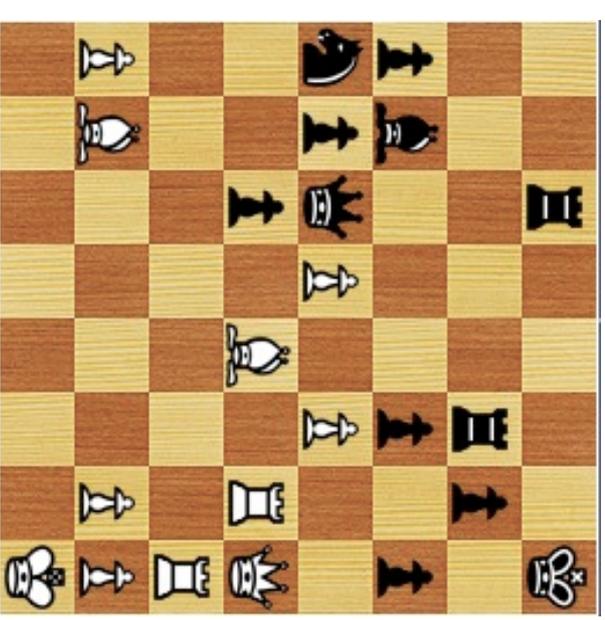
Schach

- ▶ Wer von Euch kann Schach spielen?
- ▶ Wer ist der beste Schachspieler hier?
- ▶ Glaubt Ihr, dass man Schach auch mit dieser Methode lösen kann?

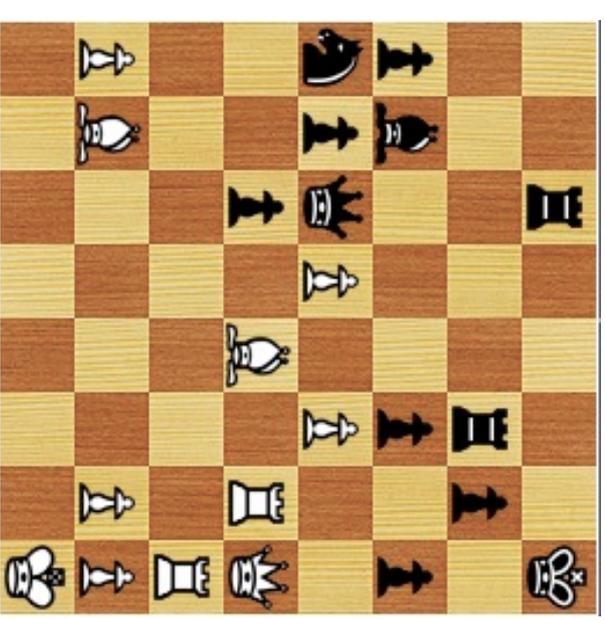


Schach

- ▶ Wer von Euch kann Schach spielen?
- ▶ Wer ist der beste Schachspieler hier?
- ▶ Glaubt Ihr, dass man Schach auch mit dieser Methode lösen kann?



Schach



- ▶ Wer von Euch kann Schach spielen?
- ▶ Wer ist der beste Schachspieler hier?
- ▶ Glaubt Ihr, dass man Schach auch mit dieser Methode lösen kann?
- ▶ **Antwort:** Im Prinzip ja, aber der Spielbaum ist so groß, dass man ihn nicht aufschreiben könnte, weil es dafür nicht genügend Atome im Universum gäbe!

3. Spiele in “Normalform”

(Bei denen sich Spieler gleichzeitig entscheiden müssen)

Jetzt spielen zwei Spieler gleichzeitig

Spieler A und B nehmen gleichzeitig einen oder zwei Spielsteine in die Hand und legen sie verdeckt auf den Tisch. Dann werden sie geöffnet.

In dieser Tabelle steht, wie viele Punkte beide bekommen:

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 1, B: 1	A: 0, B: 0
A hat zwei Steine	A: 0, B: 0	A: 2, B: 2

Spielt dieses Spiel einmal in Zweiergruppen!

Ein zweites Spiel

Jetzt sind die Punkte etwas anders:

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Spielt dieses Spiel auch einmal in Zweiergruppen!

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird!

Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird! Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Nimm an, A hat einen Stein.
Was wäre dann am besten für B?

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird!

Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird!

Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Nimm an, A hat zwei Steine.
Was wäre dann am besten für B?

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird! Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird! Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

In jedem Fall: zwei Steine sind besser!
B nimmt also zwei Steine.

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird!

Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

**B nimmt also zwei Steine.
Was ist dann am besten für A?**

Wie spielt man so etwas am besten?

Einen Spielbaum können wir hier nicht aufzeichnen, denn es gibt ja keine Reihenfolge, in der gespielt wird! Stattdessen gibt es nur die “Normalform” (die Tabelle):

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 4, B: 1	A: 0, B: 3
A hat zwei Steine	A: 1, B: 0	A: 2, B: 2

Wenn beide kein Interesse haben, etwas anderes zu machen, dann nennt man das ein **Nash-Gleichgewicht**.

Ein Beispiel zum Probieren

Versucht mal, hier jeweils das Nash-Gleichgewicht zu finden!

Spiel 1

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 1, B: 1	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 0, B: 0	A: 1, B: 1

Spiel 2

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 0, B: 0	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 1, B: 1	A: 0, B: 1

Lösung

Versucht mal, hier jeweils das Nash-Gleichgewicht zu finden!

Spiel 1

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 1, B: 1	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 0, B: 0	A: 1, B: 1

Spiel 2

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 0, B: 0	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 1, B: 1	A: 0, B: 1

Lösung

Versucht mal, hier jeweils das Nash-Gleichgewicht zu finden!

Spiel 1

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 1, B: 1	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 0, B: 0	A: 1, B: 1

Spiel 2

	B hat einen Stein	B hat zwei Steine
A hat einen Stein	A: 0, B: 0	A: 2, B: 2
A hat zwei Steine	A: 1, B: 1	A: 0, B: 1

Beispiel: Umweltschutz

Bei Umweltschutzproblemen (z.B. Energiesparen) ist es oft so, dass es am besten wäre, wenn alle freiwillig das “richtige” täten, auch wenn das einen etwas kostet.

Wenn aber die anderen sich nicht darum kümmern, kann einer alleine auch nichts ändern.

Auch das ist eine Art “Spiel”:

	B spart Energie	B spart keine Energie
A spart Energie	A: 5, B: 5 Gemeinsam am besten	A: 0, B: 6 B profitiert gratis
A spart keine Energie	A: 6, B: 0 A profitiert gratis	A: 1, B: 1 Beide leiden

Findest Du das Nash-Gleichgewicht?

Lösung

Auch wenn es am besten wäre, wenn beide Energie sparen, so gibt es doch nur ein Nash-Gleichgewicht, obwohl das eigentlich für beide blöd ist:

	B spart Energie	B spart keine Energie
A spart Energie	A: 5, B: 5 Gemeinsam am besten	A: 0, B: 6 B profitiert gratis
A spart keine Energie	A: 6, B: 0 A profitiert gratis	A: 1, B: 1 Beide leiden

Der Grund ist aber nicht, dass die beiden dumm sind!

Das ist das natürlich ein großes Problem!

Man muss sich also Regeln überlegen, die das verhindern.

4. Wie spielen Computer?

Methode 1: Vorausrechnen!

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.
- ▶ Die beste Variante spielen sie dann wirklich.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.
- ▶ Die beste Variante spielen sie dann wirklich.
- ▶ Bei einfachen Spielen (Tic Tac Toe) klappt das perfekt.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.
- ▶ Die beste Variante spielen sie dann wirklich.
- ▶ Bei einfachen Spielen (Tic Tac Toe) klappt das perfekt.
- ▶ Bei komplizierteren (Dame) inzwischen auch.

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.
- ▶ Die beste Variante spielen sie dann wirklich.
- ▶ Bei einfachen Spielen (Tic Tac Toe) klappt das perfekt.
- ▶ Bei komplizierteren (Dame) inzwischen auch.
- ▶ Bei ganz komplexen klappt es nicht perfekt, aber so gut, dass sie auch einen Weltmeister schlagen (Schach).

Methode 1: Vorausrechnen!

- ▶ Bei vielen Spielen können Computer einfach ein paar Züge vorausrechnen.
- ▶ Dann schauen sie, wie es steht.
- ▶ Wenn es nicht gut steht, probieren sie andere Züge aus.
- ▶ Die beste Variante spielen sie dann wirklich.
- ▶ Bei einfachen Spielen (Tic Tac Toe) klappt das perfekt.
- ▶ Bei komplizierteren (Dame) inzwischen auch.
- ▶ Bei ganz komplexen klappt es nicht perfekt, aber so gut, dass sie auch einen Weltmeister schlagen (Schach).
- ▶ Nur bei einem Spiel klappte diese Methode.....

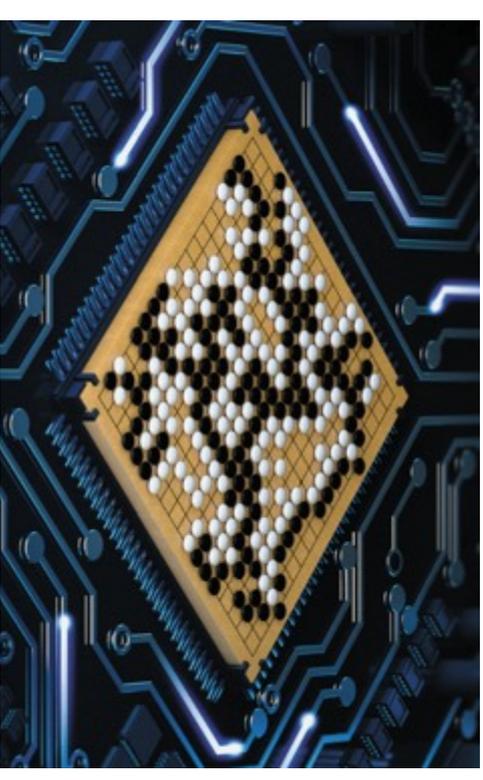
Go

- ▶ Go ist das älteste Brettspiel der Welt (ca. 3000 Jahre).
- ▶ Es stammt aus China.
- ▶ Millionen Menschen spielen es.
- ▶ Es gibt sogar Go-Profis!
- ▶ Der Spielbaum von Go ist unglaublich groß! – Selbst für Computer *viel* zu groß!



Methode 2: Wir bauen ein Gehirn nach!

- ▶ Idee: Menschen können ja Go spielen.
- ▶ Also bauen wir doch einfach ein Gehirn nach!
- ▶ Natürlich kein ganzes Gehirn, aber so eine Art Go-spielenden Teil davon...
- ▶ Man nennt so einen “Gehirnnachbau” ein “neuronales Netz”.
- ▶ Die Methode funktioniert nicht nur beim Go-Spielen.
- ▶ Computer können damit auch Fotos erkennen, Sprachen lernen und vieles mehr!



5. Wir lernen neue Spiele

(Sprossen und Atari-Go)

Sprossen

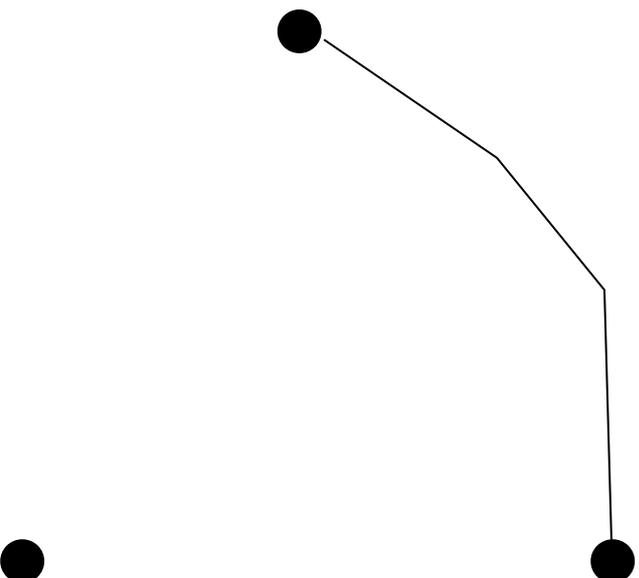
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

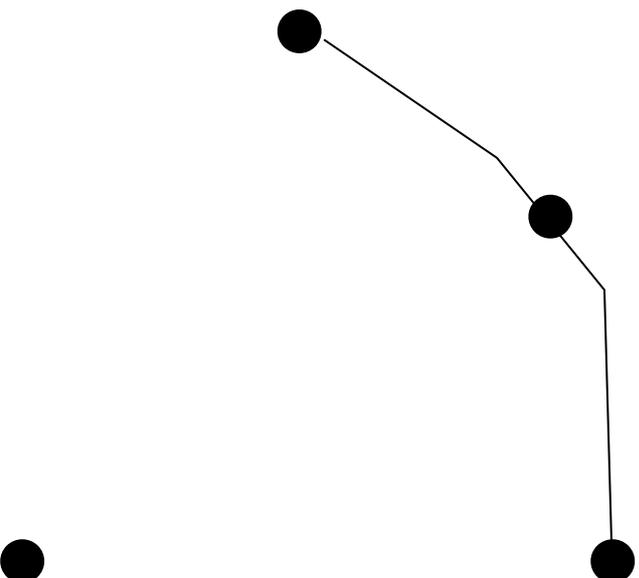
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

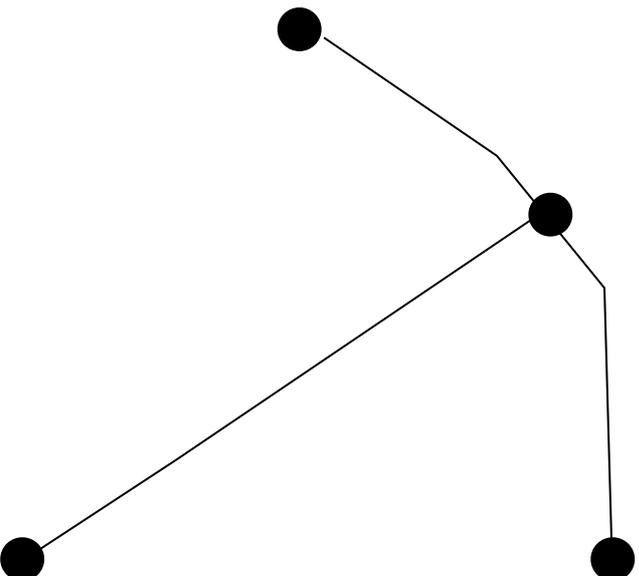
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

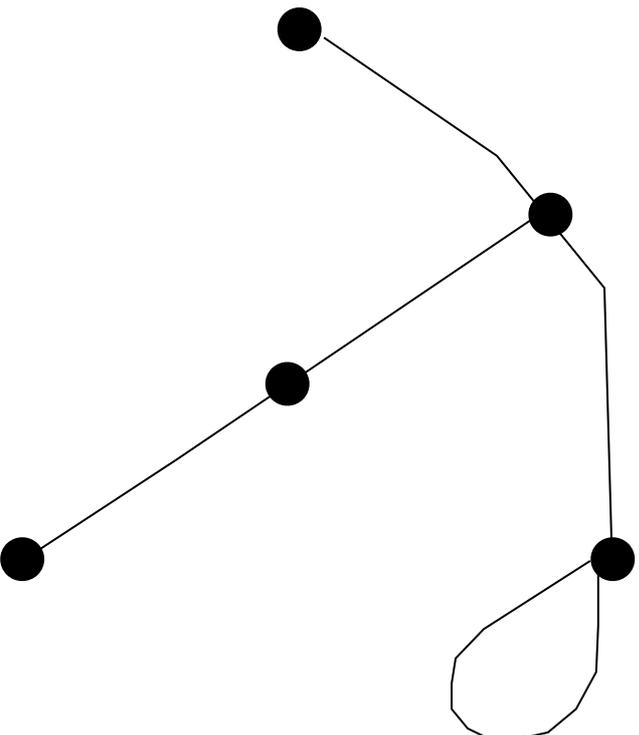
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

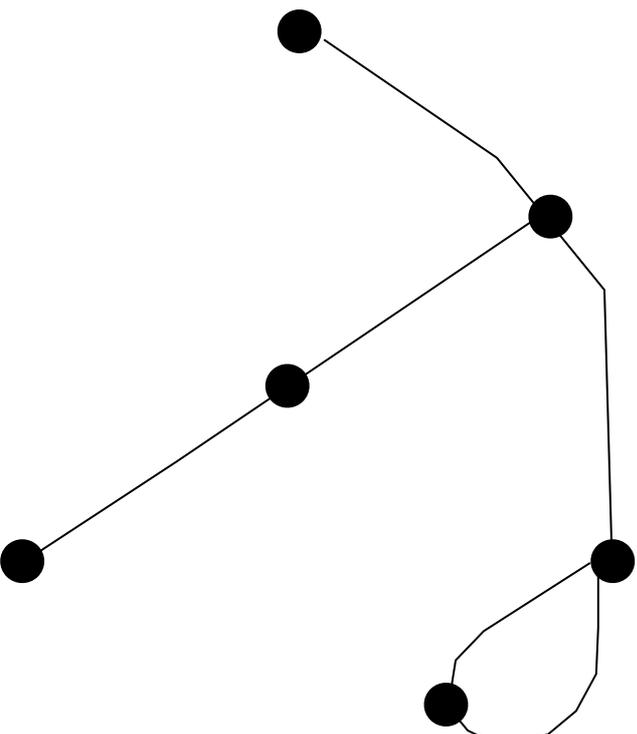
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

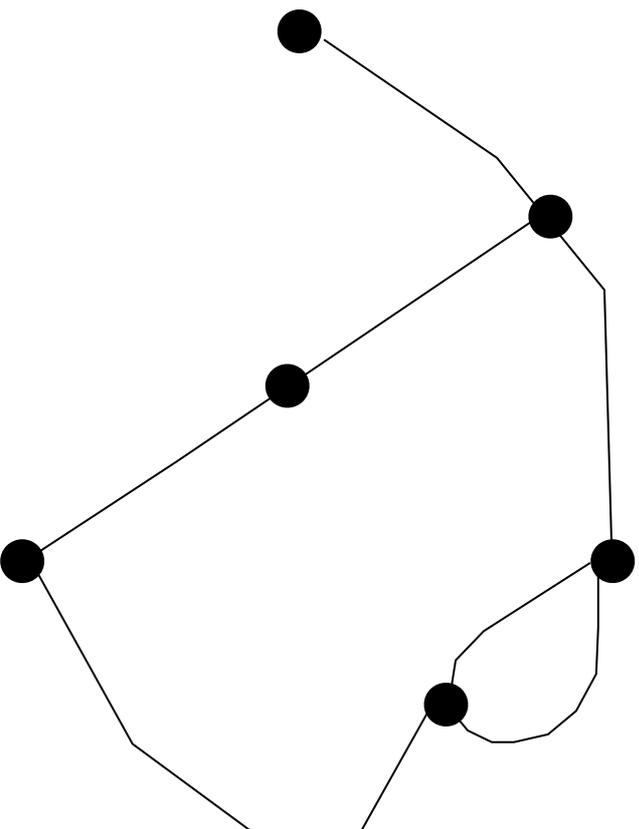
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

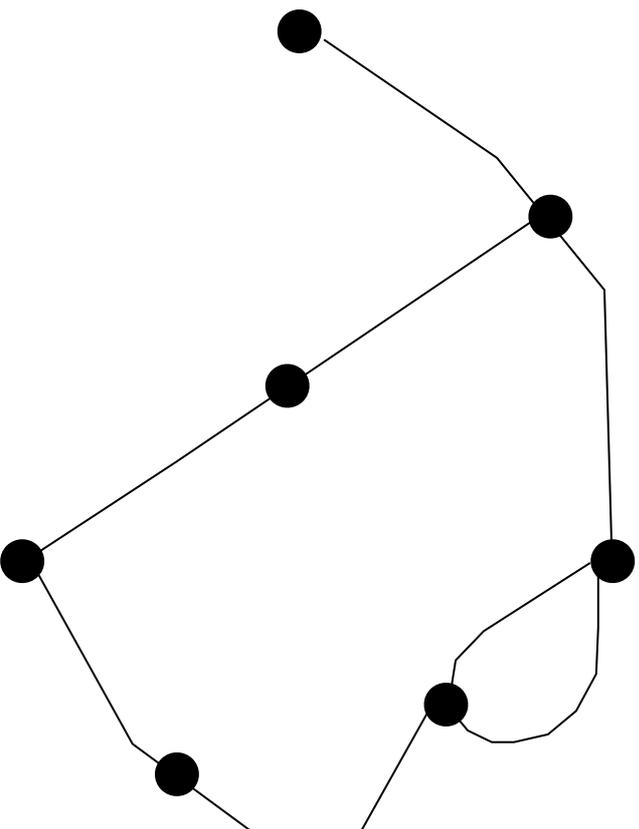
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

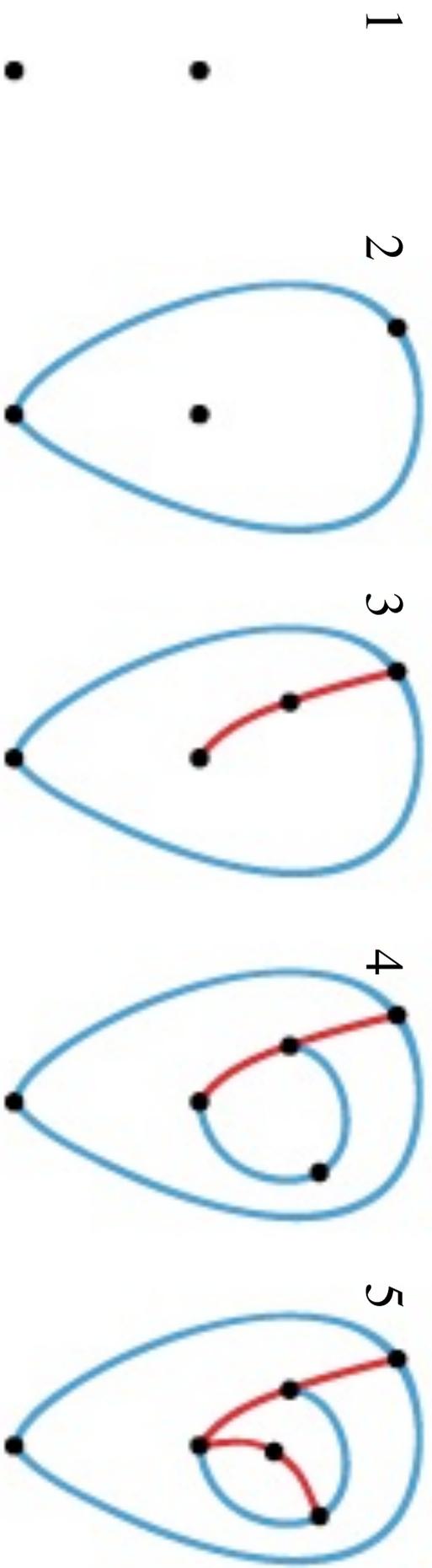
- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Sprossen

- ▶ Von den Mathematikern Conway und Paterson erfunden.
- ▶ Für 2 Spieler.



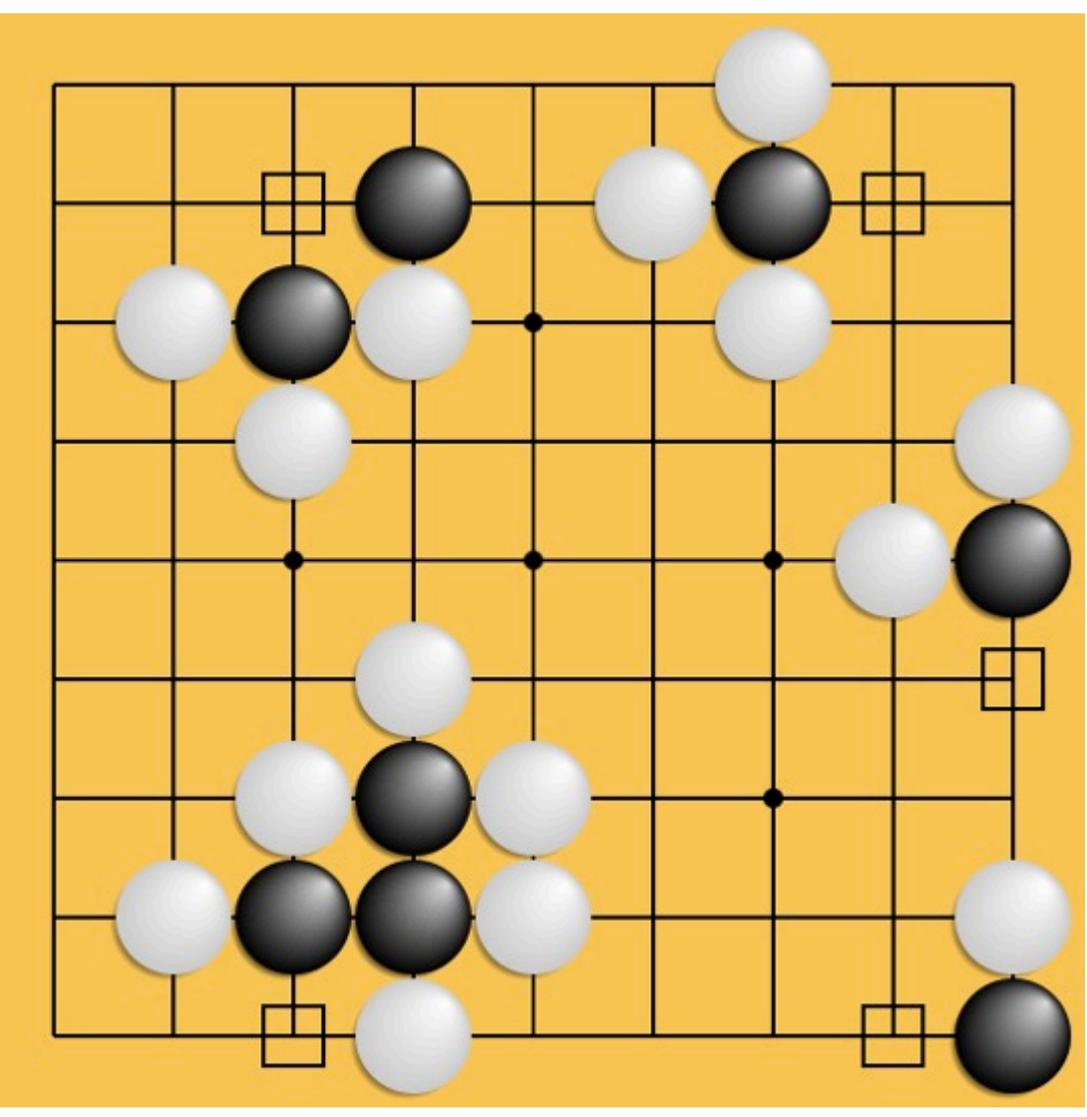
- ▶ Kannst Du beweisen, dass bei einem Anfangsknoten der zweite Spieler gewinnen kann? Und bei zwei?

Atari-Go

- ▶ Atari-Go ist eine einfache Variante von Go.
- ▶ Steine werden geschlagen, wenn sie keine “Luft” mehr haben, also nirgends an einen freien Punkt angrenzen.
- ▶ Wer zuerst einen Stein schlägt, gewinnt!
- ▶ Wenn man es besser kann, spielt man, bis der erste fünf Steine geschlagen hat.
- ▶ Wann können Steine gar nicht mehr geschlagen werden?

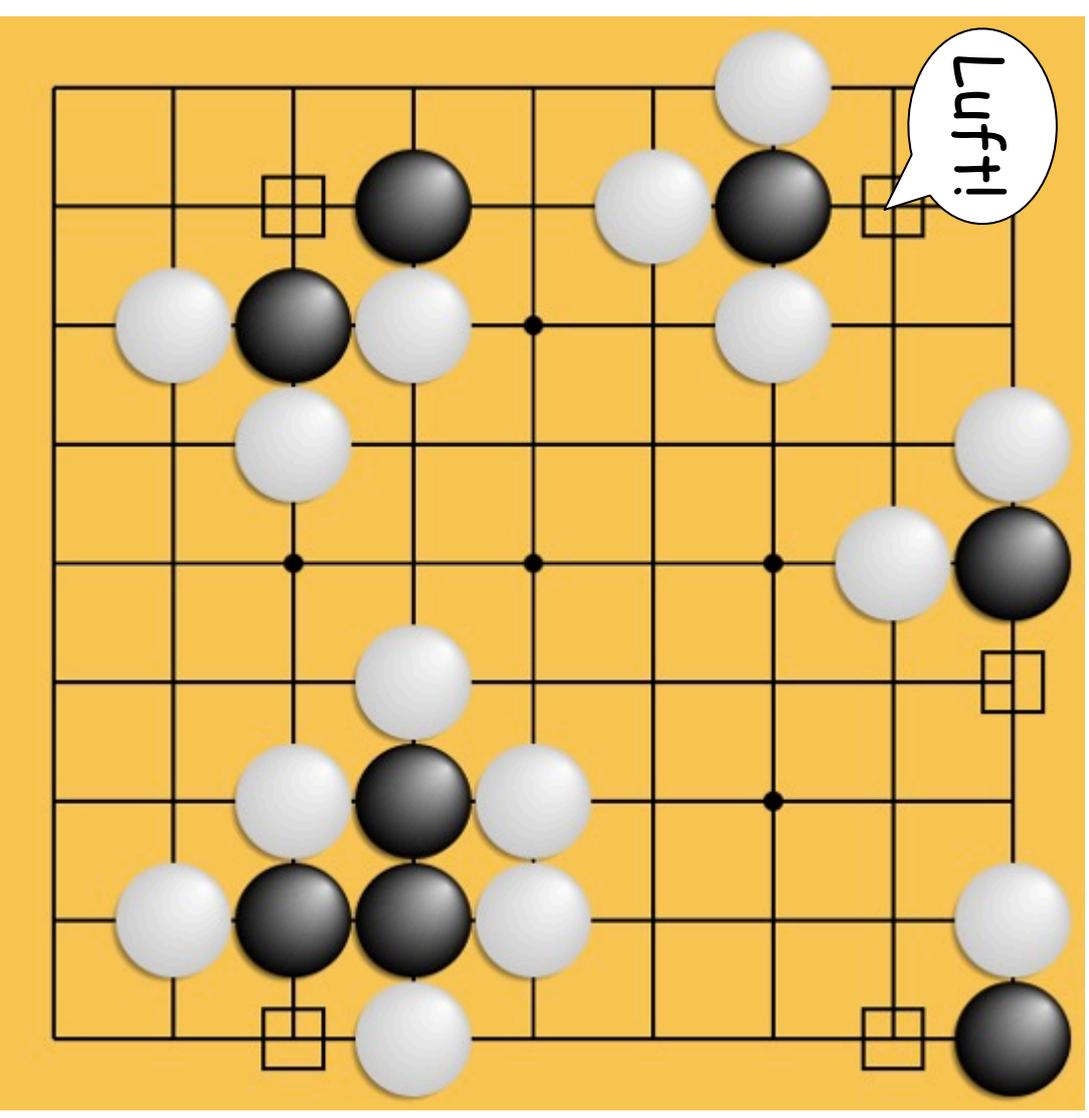
Atari-Go

- ▶ Atari-Go ist eine einfache Variante von Go.
- ▶ Steine werden geschlagen, wenn sie keine “Luft” mehr haben, also nirgends an einen freien Punkt angrenzen.
- ▶ Wer zuerst einen Stein schlägt, gewinnt!
- ▶ Wenn man es besser kann, spielt man, bis der erste fünf Steine geschlagen hat.
- ▶ Wann können Steine gar nicht mehr geschlagen werden?



Atari-Go

- ▶ Atari-Go ist eine einfache Variante von Go.
- ▶ Steine werden geschlagen, wenn sie keine “Luft” mehr haben, also nirgends an einen freien Punkt angrenzen.
- ▶ Wer zuerst einen Stein schlägt, gewinnt!
- ▶ Wenn man es besser kann, spielt man, bis der erste fünf Steine geschlagen hat.
- ▶ Wann können Steine gar nicht mehr geschlagen werden?



Viel Spaß beim Spielen!

Atari-Go ▶

Sprossen ↓

