Zusammenfassung von Algorithmische Geometrie.

Kapitel 0: Vorbemerkungen:

Inhalt der Vorlesung: Algorithmen und Datenstrukturen zur Lösung geometrischer Probleme.
Beispiele: Robotik / Bewegungsplanung, Computergrafik, CAD, VLSI
Typische Probleme:
- konvexe Hülle
- Zerlegung in einfache konvexe Teile (zB. Triangulierung).
- Schnittprobleme (zB. Segmente, Polygone)
- Suchprobleme (Memberanfrage in Pktmenge, Nearest-Neighbor, Range-Abfragen).
- Bewegungsplanung (Roboter)
- Hidden Line / Surface (Elimination).

Grundlegende Ansätze bzw. Vorgehensweisen:
- Devide & Conquer
- Plane Sweep.
- Hierarchische Darstellung
- Dualität
- Randomisierte Algorithmen.
- Rundungsfehler u. degenerierte Eingaben.

Kapitel I: Konvexe Hüllen.

1.1. Konstruktion der konvexen Hülle einer Pktmenge im $\mathbb{R}^2$ – Grundlagen.

1.1.1. Def: Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ Pktmenge.
S heißt konvex: $\Leftrightarrow \forall p, q \in S$ gilt: $\overline{pq} \subset S$.
konvexe Hülle einer Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ ($CH(S)$) ist die kleinste konvexe Menge, die S enthält.

Wir betrachten nun endliche Pktmengen, dh. $|S| = n \in \mathbb{N}$.
Anm: Der Rand von $CH(S)$ ist ein konvexes Polygon mit Ecken aus S.
Bew. Übung.

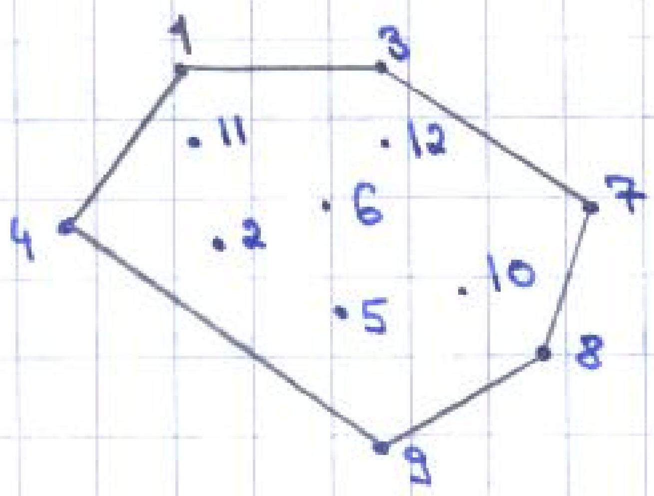
Konvexe Hülle-Problem für endl. Menge $S \subseteq \mathbb{R}^2$:
Berechne die Folge der Ecken von $CH(S)$ gg. den Uhrzeigersinn (pos. orientiert).
$\rightarrow q_1, \dots q_\ell \in S$. (Anordnung definiert Kanten der Fläche).
Degenerierte Fälle: $\ell = 2$ (alle Pkte sind colinear)
$\ell = 1$ (alle Pkte in S sind gleich).

Problem im $\mathbb{R}^3$ analog, $CH(S)$ ist konvexes Polyeder mit Ecken aus S.

1.1.2. Satz: Berechnung der konvexen Hülle von n Pktn. im $\mathbb{R}^2$ ist mind. so schwer wie das Sortieren von n Zahlen.
Bew. siehe Üb. (Idee: Führe Sortieren von $x_1 .. x_n$ zurück auf $CH(\{p_1 .. p_n\})$.).

1.1.3. Korollar: Im Allgemeinen braucht die Berechnung von $CH(S)$ Zeit $\Omega(n \log n)$.

1.1.4. Bsp:



$S = \{1..12\}$, $CH(S) = 8, 7, 3, 1, 4, 9$
(Jeder zyklische Shift)

1.1.5. Wdh: Lexikografische Ordnung (siehe Strings) für Pkte im $\mathbb{R}^2$:
Lexikogr. Sortierung nach kartesischen (x,y)-Koordinaten, dh. für zwei Pkte in der Ebene, also $p, q \in \mathbb{R}^2$ gilt: $p < q :\Leftrightarrow p_x < q_x \vee (p_x = q_x \wedge p_y < q_y)$
Dh. Sortierung von links nach rechts bzw. von unten nach oben (bei gleicher x-Koordinate).