Allgemein: Seien $p=(p_x,p_y)$, $q=(q_x,q_y)$ und $r=(r_x,r_y)$ drei Pkte im $\mathbb{R}^2$.
Sei $\vec{p}$ der Vektor, der vom Nullpkt ausgeht und in Richtung p zeigt. Und seien $\vec{q}$ und $\vec{r}$ Vektoren, die von p ausgehen und in Richtung q bzw. r zeigen.
Betrachte nun das Parallelogramm, welches durch die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{r}$ aufgespannt wird. Sei $V(P)$ = die Fläche des Parallelogramms.
Beh: $V(P) = |\det A|$, wobei $A = \begin{pmatrix} q_x-p_x & q_y-p_y \\ r_x-p_x & r_y-p_y \end{pmatrix}$

Bem: diese Beh. überträgt sich auch auf $\mathbb{R}^n$.
Man betrachte hierbei $u_1..u_n \in \mathbb{R}^n$ und $P=\{u_1a_1+..+u_na_n : 0\le a_i\le 1, i\in\{1..n\}\}$.
$\Rightarrow V(P) = |\det A|$, A entsprechend.

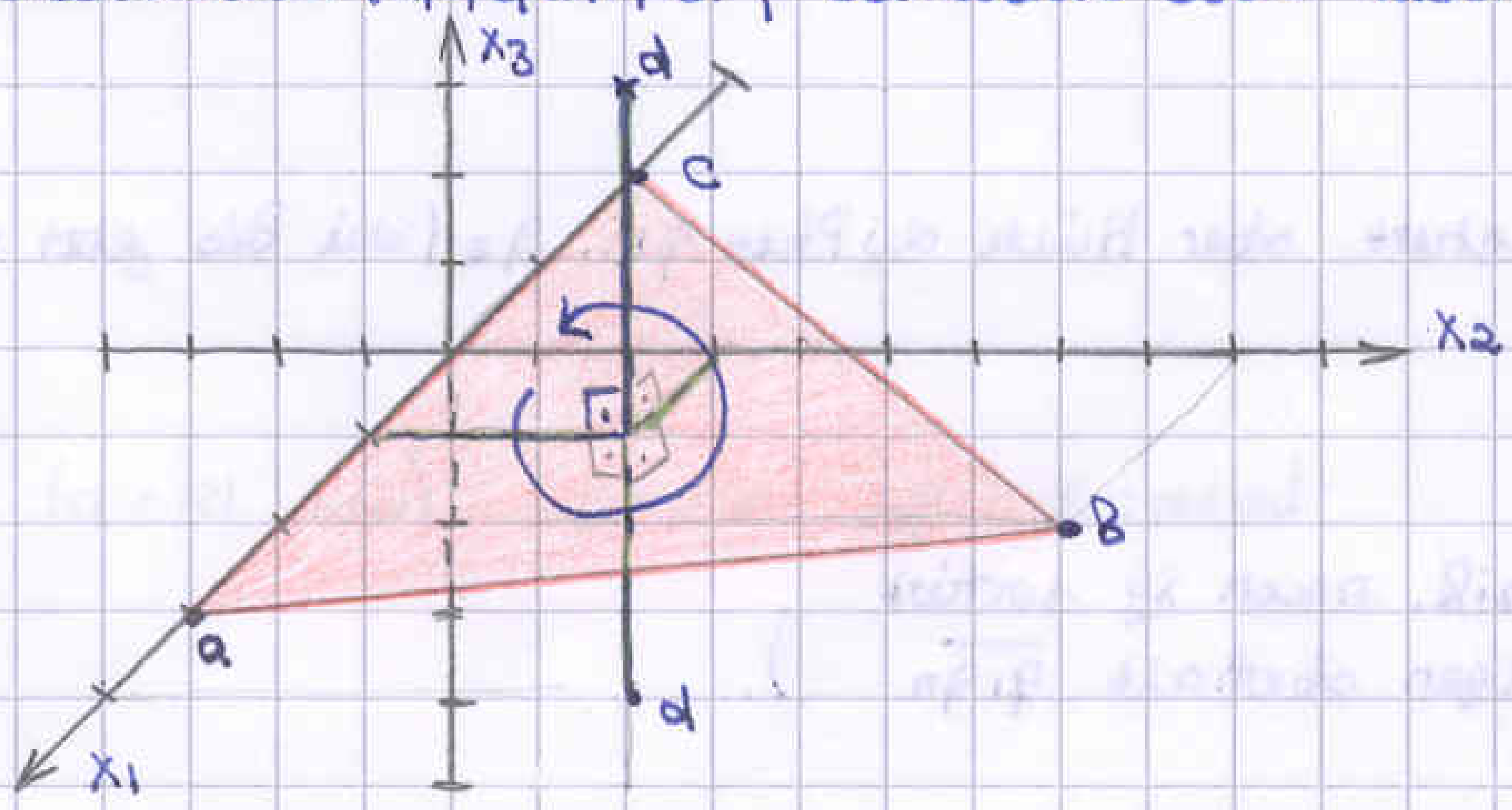
Wir betrachten Δpqr:

1.2.6.1 Satz: $p,q,r\in\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} q_x-p_x & q_y-p_y \\ r_x-p_x & r_y-p_y \end{pmatrix}$.
$\Rightarrow$ (i) $|\det A| = 2\cdot$Fläche von Δpqr.
(ii) sign(det A) gibt die Orientierung an:
-1: neg. orientiert (right turn)
0: collinear.
+1: pos. orientiert (left turn).
Bew. siehe Lernordner.

1.2.6.2 Def: Wir definieren das geometrische Prädikat:
orientation(p,q,r) = $\operatorname{sign}\begin{vmatrix} p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \\ r_x & r_y & 1\end{vmatrix}$ $\left(= \operatorname{sign}\left((q_x-p_x)(r_y-p_y)-(r_x-p_x)(q_y-p_y)\right)\right)$.
D.h. orientation(p,q,r) und damit der Test $d_r < d_q$ kann mit zwei Multiplikationen und fünf Subtraktionen berechnet werden.

2) Falls $d_r = d_q$ (dh. orientation$(p,q,r)=0$), müssen wir herausfinden, welcher der Pkte q oder r weiter von p entfernt liegt.
Naiv: Berechne Distanzen (mit eukl. Metrik):
$\text{dist}(p,q) = \sqrt{(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2}$
$\rightsquigarrow$ Nachteil: Wurzel!
$\Rightarrow$ Besser: Vergleiche Quadrate der Distanzen:
$(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2 \overset{?}{\lessgtr} (p_x-r_x)^2+(p_y-r_y)^2$?
($\rightsquigarrow$ 4 Subtraktionen, 4 Multiplikationen, 2 Additionen).

1.2.7. Übertragung auf höhere Dimensionen:
Das Orientierungsprädikat kann auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.
Insbesondere im $\mathbb{R}^3$: seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$
orientation$(a,b,c,d)\in\{-1,0,1\}$
Sei orientation$(a,b,c,d)\ne 0$, betrachte Ebene durch a,b,c.



1.2.7.1 Satz: Für $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$ betrachte Ebene durch a,b,c.
Falls orientation $\ne 0$, so gilt:
(i) orientation$(a,b,c,d) = -1$, wenn von d aus $\Delta a,b,c$ negativ orientiert ist.
orientation$(a,b,c,d)=+1$, wenn von d aus $\Delta a,b,c$ positiv orientiert ist.
(ii) orientation$(a,b,c,d) = \operatorname{sign}\begin{vmatrix} a_{x_1} & a_{x_2} & a_{x_3} & 1 \\ b_{x_1} & b_{x_2} & b_{x_3} & 1 \\ c_{x_1} & c_{x_2} & c_{x_3} & 1 \\ d_{x_1} & d_{x_2} & d_{x_3} & 1 \end{vmatrix}$