1.3.6. Satz: Sei S Menge von n Pkten im $\mathbb{R}^2$.

a) $CH(S)$ kann in Zeit $O(n\log n)$ berechnet werden (worst case)

b). Falls S lexik. nach xy-Koord. sortiert ist, dann kann $CH(S)$ in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Bew. siehe oben.

1.3.7. Bemerkung:

1) Alg. optimal, da CH-Problem (1.a.) genauso schwierig ist wie sortieren.
   Bew. Übung.

2). obere bzw. untere Hülle sind auch für sich alleine wichtig (für bestimmte Probleme)

3). Optimalität gilt für worst case; es gibt Situationen, in denen Alg. I. besser ist (wenn # Ecken von $CH(S) < \log n$).

1.3.8. Varianten von Graham's Scan:

a) siehe Übung

b). untere u. obere Hülle gleichzeitig berechnen

c). Berechnung der gesamten Hülle in einer Phase.

Idee: 1. Sortiere $S = p_1 .. p_n$.

2. Allgemeiner Schritt:

Bearbeite p_i, $i = 4..n$.

Situation: $C_{i-1} := CH(\{p_1 .. p_{i-1}\})$ ist berechnet.

p_{i-1} ist maximal in $\{p_1 .. p_{i-1}\}$

$\Rightarrow p_{i-1}$ ist die rechteste Ecke von C_{i-1}.

$\Rightarrow \overline{p_{i-1}p_i} \cap C_{i-1} = \{p_{i-1}\}$.

Der eigentliche Schritt:

Berechne Berührpkte t und b der beiden Tangenten von p_i an C_{i-1}.

Genauer: $t \leftarrow p_{i-1}$ d.h. orientation$(p_i, t, succ(t)) \leq 0$

while $(p_i, t, succ(t))$ nicht lefttum do

$t \leftarrow succ(t)$

od

$b \leftarrow p_{i-1}$ d.h. orientation$(p_i, b, pred(b)) \geq 0$

while $(p_i, b, pred(b))$ nicht righttum do

$b \leftarrow pred(b)$

od

Bea: hier ähnliche Argumentation:
die # unterwegs besuchten Pkte kann in $\Omega(n)$ liegen,
aber jeder von ihnen wird anschließend aus
der konvexen Hülle entfernt und kann danach
nie wieder als Eckpkt in Erscheinung treten
Also wird er auch nie wieder besucht
$\Rightarrow$ Es kann insgesamt höchstens n Besuche geben
$\Rightarrow$ $O(n\log n)$ Laufzeit

Nachdem wir nun b und t berechnet haben:

- Entferne alle Pkte zwischen b und t
- Füge p_i nach C_i ein.

Weitere Implementierungsdetails und Laufzeitanalyse siehe 3. Übung.

Bsp. zu c) siehe Kursordner.

1.4. Algorithmus III: Devide & Conquer.

Triangulierung schauen.

1.4.1. Spezialfall: Konvexe Hülle von zwei konvexen Polygonen P und Q.

$P = p_1 .. p_m$, $Q = q_1 .. q_e$, Ecken gg. Uhrzeigersinn sortiert.

Aufgabe: Berechne $CH(P \cup Q)$

Triviale Lsg: Graham's Scan auf die Menge aller Ecken. $O(n\log n)$

Bessere Lsg: Ausnutzen der Polygonstruktur. $O(n)$.

1) Finde Sortierung aller Ecken in Zeit $O(n)$

2) Berechne die Hülle in Zeit $O(n)$. (siehe S. 1.3.6. b)).

$\Big\}$ $O(n)$

zu 1): Betrachte P:

(i) Finde extreme Ecken a und b in Zeit $O(m)$

L_2 := untere Polygonzug

starte bei a und laufe gg. Uhrzeigersinn über P bis b erreicht ist.

L_1 := obere Polygonzug

laufe von b nach a. und drehe um.