(ii) Mische $L_1$ und $L_2$ zu einer sortierten Gesamtliste $L_P$ zusammen in Zeit $O(m)$ (→ siehe Mergesort)

Analog: Sortiere Folge $L_Q$ der Ecken von $Q$ in Zeit $O(\ell)$.

(iii) Mische $L_P$ und $L_Q$ in Zeit $O(m+\ell) = O(n)$ (wobei $n := m+\ell$) zu einer sortierten Gesamtfolge zusammen.

→ dann Graham's Scan.

**1.4.2. Allgemein:** Sei $S \subset \mathbb{R}^2$, $|S| = n$.

```
CONVEX_HULL(S).
if |S| = 1 then
    output S
else
    teile S in zwei möglichst gleich große Teile S1 und S2   } DEVIDE
    (zB. |S1| = ⌈|S|/2⌉ und |S2| = ⌊|S|/2⌋
    P ← CONVEX_HULL(S1)                                      } CONQUER
    Q ← CONVEX_HULL(S2)
    berechne CH(P ∪ Q) wie in letzter Vorlesung gezeigt.     } MISCHSCHRITT
fi.
```

hier wird die eigentliche Rechnung durchgeführt.

**1.4.3. Laufzeit:**

Teilen: $O(n)$

Mischen: $O(n)$

Merge auf Listen

Graham's Scan (ohne Sortieren).

$$\Rightarrow T(n) = \begin{cases} C_0, & n = 1 \\ C_1 \cdot n + 2 \cdot T(n/2), & n > 1 \end{cases}$$

Das ist also dieselbe Rekursion wie für Mergesort (aber mit anderen Konstanten natürlich).

⇒ Gesamtlaufzeit des Verfahrens ist $O(n \log n)$ (siehe Analyse von Mergesort).

## 1.5. Eine Anwendung von CONVEX_HULL

**1.5.1. Problem:** Geg. sind $n$ Halbebenen $H_1 \dots H_n$ von $\mathbb{R}^2$

Berechne $P = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$

**1.5.2. Def:** Eine abgeschlossene Halbebene = { alle Pkte auf gleicher Seite einer Geraden $\ell$ } ∪ $\ell$.

**1.5.3. Anm:** Schnitt $P$ ist konvexes (möglicherweise unbeschränktes) Polygon, da der Schnitt konvexer Mengen wieder konvex ist.

**1.5.4. Ziel und Lösungsansatz:**

Ziel: Berechne die Folge der Ecken von $P$ gg. den Uhrzeigersinn.

Lösung: Zurückführung auf konvexe Hülle einer geeigneten Pktmenge.

Dazu transformieren wir die definierenden Geraden in "duale" Pkte.

**1.5.5. Definition:** (Geometr. Transformation)

a). Sei $\ell = \{ y : \underbrace{y = ax+b}_{\text{Geradengleichung von } \ell},\ x \text{ bel.}, a,b \text{ fest} \}$ eine nicht vertikale Gerade.

Der Punkt $D(\ell) := (a,b)$ heißt der duale Punkt zu $\ell$.

b). Sei $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ein Pkt. Die Gerade $D(P) = \{ y : y = -ax + b, x \text{ Beliebig} \}$ heißt die duale Gerade zu $p$.

Abbildung $D$ erlaubt die relative Lage von Objekten.

**1.5.6 Lemma:** Pkt $p$ liegt auf (oberhalb / unterhalb) einer Geraden $\ell$

⇔ Gerade $D(P)$ liegt auf (oberhalb / unterhalb) Pkt $D(\ell)$.

**Beweis:** Sei $p = (p_x, p_y)$, $\ell = \{ y \in \mathbb{R} : y = ax + b, x \in \mathbb{R} \}$ ($a,b$ fest).

$\Rightarrow D(\ell) = (a,b)$ und $D(P) = \{ y : y = -p_x x + p_y, x \in \mathbb{R} \}$

- sei $p$ gelegen auf $\ell$

  $\Leftrightarrow p_y = a \cdot p_x + b$

  $\Leftrightarrow -b = ap_x - p_y$

  $\Leftrightarrow b = -p_x a + p_y$

  $\Leftrightarrow D(P)$ liegt auf $D(\ell)$.

- sei $p$ gelegen oberhalb $\ell$ (unterhalb analog).

  $\Leftrightarrow ax + b < p_y \ \forall x \in \mathbb{R}$

  Bzw. sogar $ap_x + b < p_y$.

  $\Leftrightarrow -ap_x - b > -p_y$

  $\Leftrightarrow -ap_x + p_y > b$

  $\Leftrightarrow D(P)$ liegt oberhalb $D(\ell)$.