1.5.7. Folgerung: Wenn $p = \ell_1 \cap \ell_2 \Rightarrow D(\ell_1), D(\ell_2) \in D(p)$.
Bew. siehe Leitordner. (eigentlich "$\Leftrightarrow$")

1.5.8. Betrachte folgendes Problem:
Seien $\ell_1 .. \ell_n$ n nicht vertikale Geraden im $\mathbb{R}^2$.
$\ell_i^+ :=$ Halbraum oberhalb von ℓ_i $(i \in \{1..n\})$
$\ell_i^- :=$ Halbraum unterhalb von ℓ_i $(i \in \{1..n\})$.
Sei weiter $m \leq n$.
Nun berechne: $S := \ell_1^+ \cap \ldots \cap \ell_m^+ \cap \ell_{m+1}^- \cap \ldots \cap \ell_n^-$.

$\longmapsto$ **1.5.8.1. Beobachtung:** Unser ursprüngliches Problem kann in dieser Weise formuliert werden.

Sei $S^+ := \bigcap_{i=1}^{m} \ell_i^+$ und $S^- := \bigcap_{j=m+1}^{n} \ell_j^-$

$\Rightarrow S = S^+ \cap S^-$
Wir berechnen S^+ und S^- getrennt.
Zunächst S^+ (S^- analog):
S^+ ist ein nach oben unbeschränktes konvexes Polygon.

$\longmapsto$ **1.5.8.2. Def:** Eine Gerade ℓ_i, $1 \leq i \leq m$ heißt redundant, falls sie nicht zum Rand von S^+ beiträgt, d.h. es gibt keine Kante von S^+ auf ℓ_i.

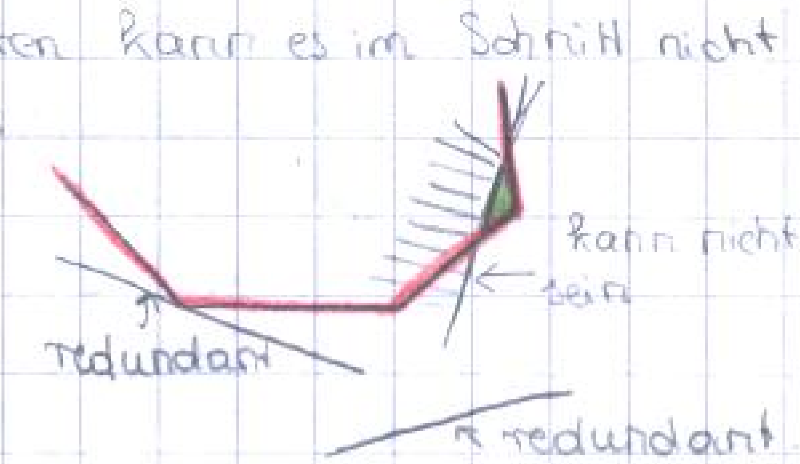
Beobachtung: Redundante Geraden können ignoriert werden.
Frage: Wie findet man sie? $\rightarrow$ Dualität.

$\longmapsto$ **1.5.8.3. Lemma:** ℓ_i ist redundant $(i \in \{1..m\})$
$\Leftrightarrow$ Pkt $D(\ell_i)$ ist keine Ecke der oberen konvexen Hülle von $\{D(\ell_1) \ldots D(\ell_m)\}$.

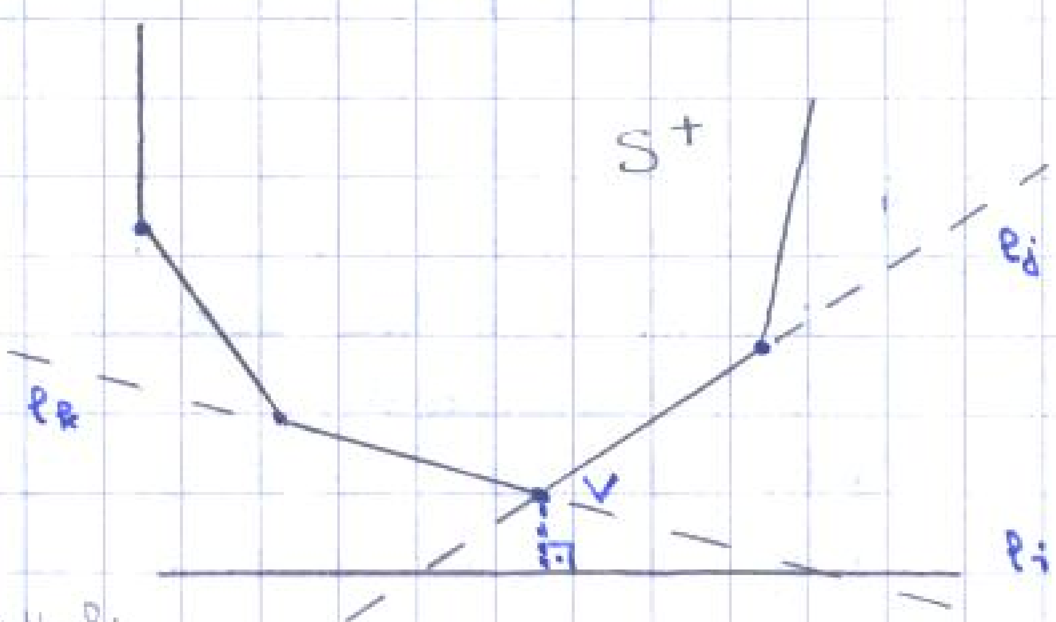
Beweis:

Vorbemerkung:
Sei ℓ_i redundant
$\Rightarrow S^+ \cap \ell_i = \emptyset$ oder Ecke von S^+
Sei v die Ecke von S^+, die ℓ_i am nächsten liegt.

Bea: Zwei ecken kann es im Schnitt nicht geben, denn:



Beobachtung:
1). $\exists$ zwei nicht redundante Geraden ℓ_j und ℓ_k mit $v = \ell_j \cap \ell_k$.
Skizze:
2). Steigung von ℓ_i liegt zw. Steigungen von ℓ_j und ℓ_k, da sonst entweder ℓ_i nicht redundant oder eine andere Ecke als v näher zu ℓ_i liegt.



3). Pkt $D(\ell_i)$ liegt auf oder unterhalb der Geraden $D(v)$
Bea: v ist auf oder oberhalb ℓ_i
$\Leftrightarrow D(v)$ auf oder oberhalb $D(\ell_i)$
$\Leftrightarrow D(\ell_i)$ auf oder unterhalb $D(\ell_i)$
4). $D(\ell_j)$ und $D(\ell_k)$ liegen auf der Geraden $D(v)$
Bea: v liegt auf ℓ_j und ℓ_k
$\Leftrightarrow D(v)$ liegt auf $D(\ell_j)$ und $D(\ell_k)$

$\rightarrow$