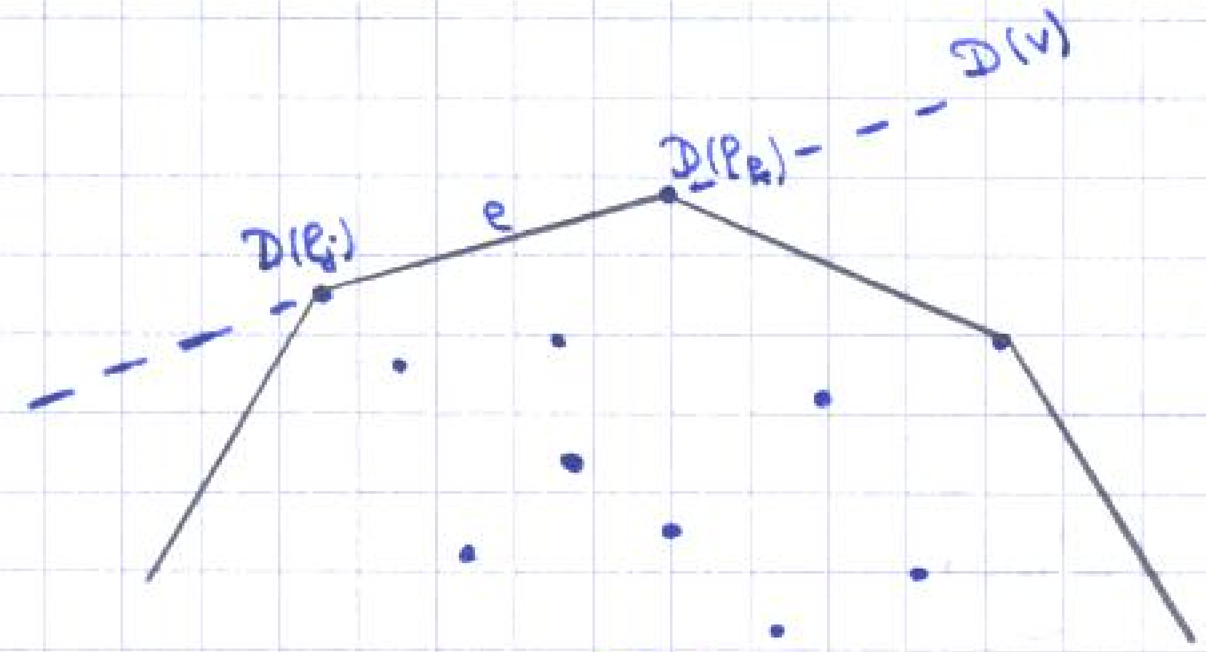
1.5.8.4. Lemma: $v \in \mathbb{R}^2$ ist Ecke von S^+
$\Leftrightarrow$ Die Gerade $D(v)$ enthält eine Kante der oberen Hülle von $\{D(\ell_1) \dots D(\ell_m)\}$.



$D(\ell_1) \dots D(\ell_m)$

Beweis:

„$\Leftarrow$": $D(v)$ enthält eine Kante e der oberen Hülle von $\{D(\ell_1) \dots D(\ell_m)\}$.
z.z. v ist Ecke von S^+
Sei $e = (D(\ell_j), D(\ell_k))$
Dualität: $v \in \ell_j \cap \ell_k$
obere Hülle $\Rightarrow$ alle Pkte $D(\ell_i)$, $i \in \{1..m\}$ liegen unterhalb oder auf $D(v)$
Dualität $\Rightarrow$ Gerade ℓ_i $(1 \leq i \leq m)$ liegt unterhalb oder auf v
d.h. v liegt über oder auf ℓ_i.
$\Rightarrow v \in S^+$
v = Schnittpkt zweier Geraden $\Rightarrow$ v ist Ecke von S^+
(Bea: ℓ_j und ℓ_k sind nicht redundant
denn wenn sie es wären $\Rightarrow$ $D(\ell_j)$ und $D(\ell_k)$ wären nicht Ecken von $CH(D(\ell_1) .. D(\ell_m))$ nach L.1.5.8.3 $\Rightarrow$ ↯)

„$\Rightarrow$" v ist Ecke von S^+
$\Rightarrow$ $v = \ell_j \cap \ell_k$
1.5.7 $\Rightarrow$ $D(\ell_j), D(\ell_k) \in D(v)$
$\Rightarrow$ $D(v)$ enthält also die Kante $e := (D(\ell_j), D(\ell_k))$ $\Big\}$ (*)
bleibt z.z: diese Kante ist die Kante der konvexen Hülle.
Es gilt: $v \in S^+$
$\Rightarrow$ v liegt über oder auf ℓ_i $\forall\, i \in \{1..m\}$
$\Rightarrow$ $D(\ell_i)$ liegt unter oder auf $D(v)$ $\forall\, i \in \{1..m\}$
$\Rightarrow$ $D(v)$ enthält eine Kante der oberen Hülle oder $D(v)$ ist redundant
Wegen (*) kann $D(v)$ nicht redundant sein
$\Rightarrow$ $D(v)$ enthält eine Kante der oberen Hülle.

Dieses Lemma liefert einen Algorithmus zur Berechnung von $S^+ = \bigcap_{i=1}^{m} \ell_i^+$

1.5.8.5. Algorithmus:

1. Berechne die dualen Pkte $p_i = D(\ell_i)$, $i = 1..m$ $\quad O(m)$
2. Berechne die obere konvexe Hülle H von $\{p_1 .. p_m\}$ $\quad O(m \log m)$
   Seien $e_1 .. e_k$ die Kanten von H von links nach rechts
3. Berechne die Folge der Geraden $L_1 .. L_k$ so, dass $e_i \subset L_i$ $\quad O(m)$
4. Ausgabe:
   $D^{-1}(L_1) \dots D^{-1}(L_k)$ (= Eckenfolge von S^+) $\quad O(m)$

Achtung: $D^{-1} \neq D$.

L_i: $y = \alpha x + \beta$
$\Rightarrow D^{-1}(L_i) = (-\alpha, \beta)$