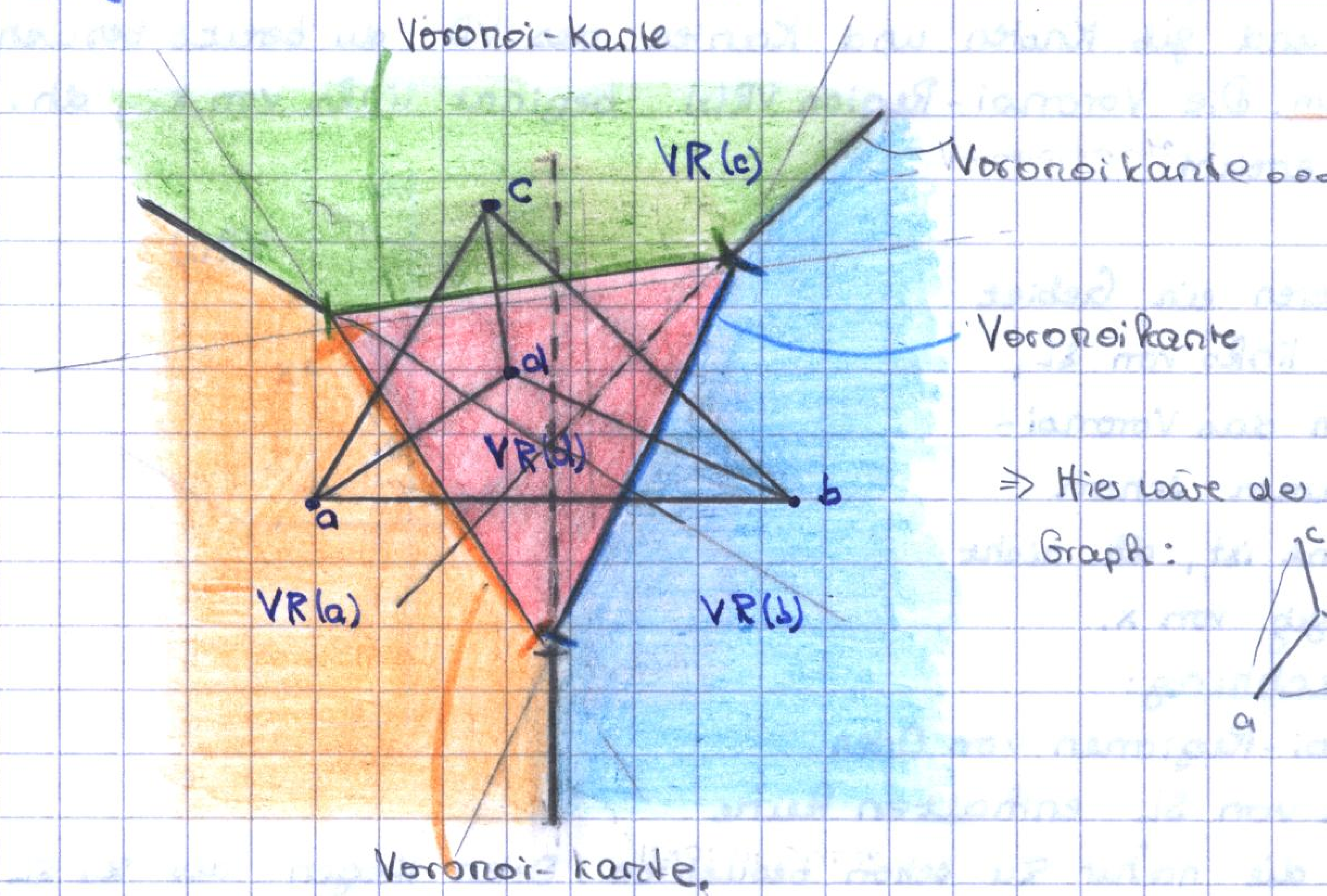
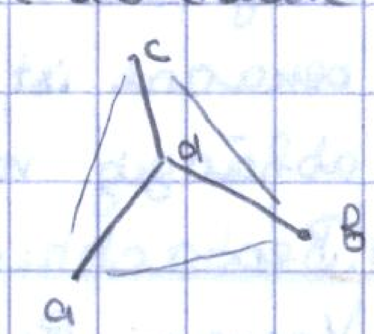
b). VD ist ein Graph, der $\mathbb{R}^2$ in Voronoi-Regionen unterteilt.
($\rightarrow$ Voronoi-Knoten + Voronoi-Kanten).
Sei $G = (V, E)$ der duale Graph zu VD(S), d.h.
$V = S$ (allg. Flächen (Regionen)) und $(x,y) \in E \Leftrightarrow$ VR(x) und VR(y) haben gemeinsame Voronoi-Kante.



$\Rightarrow$ Hier wäre der duale Graph:



- G ist ein planarer Graph und jede Kante $e \in E$ entspricht genau einer Voronoi-Kante (siehe Konstruktion von G).

(c,d) entspricht grün, (a,d) entspricht orange und (b,d) entspricht blau.
Graphentheorie $\Rightarrow$ Jeder planare Graph mit n Knoten hat maximal $3n-6$ Kanten.
$\Rightarrow$ Voronoi-Kanten $\leq 3n-6$.
Außerdem hat jeder Voronoi-Knoten mind. Grad 3 (da er durch mind. drei Orte definiert wird, von denen er gleiche Distanz hat).

$\forall v \in V: \text{Grad}(v) \geq 3$
$\Rightarrow \forall v \in V, |v| = 1: \text{Grad}(v) \geq 3$
$\Rightarrow \forall v \in V: 3 \cdot |v| \leq \text{Grad}(v)$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} 3 \cdot |v| \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow 3 \cdot \#\text{Knoten} \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$
$\Rightarrow$ Es gilt: $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) \geq 3 \cdot \#\text{VKnoten} \wedge \sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2 \cdot |E|$

$\Rightarrow 3 \cdot \#\text{VKnoten} \leq \sum \text{grad}(v) = 2 \cdot |E| \leq 2 \cdot (3n-6) = 6n-12.$
$\Rightarrow \#\text{VKnoten} \leq 2n-4.$

3.4.2.12 Bemerkungen:

1. VD für n Orte hat lineare Größe in n.
2. Sei $G = (V, E)$ dualer Graph zu VD(S), d.h. $V = S$ und $(x,y) \in E \Leftrightarrow$ VR(x) und VR(y) haben gemeinsame Voronoi-Kante. ✓
   G heißt Delaunay-Triangulierung.
   Eigenschaften: Jeder Umkreis eines Dreiecks enthält keinen Ort in seinem Inneren.

Bem: Gemeinsamer Rand von zwei VR'nen heißt Voronoikante
Und Endpkte von Voronoi-kanten sind die Voronoiknoten
$\Rightarrow$ v Vor. knoten $\Rightarrow \exists$ Orte a, b, c mit v Mittelpkt von Kreis durch a, b, c
!

$\Rightarrow$ Besser: andere Definition als 3.4.2.5!