4.3.11.3 Satz: Für $n \geq 3$ gilt: $E(\Gamma) \leq 6n-12$

Beweis:

1. Vorbemerkungen:

Wir nehmen an, dass sich die Kurven in allgemeiner Lage befinden:

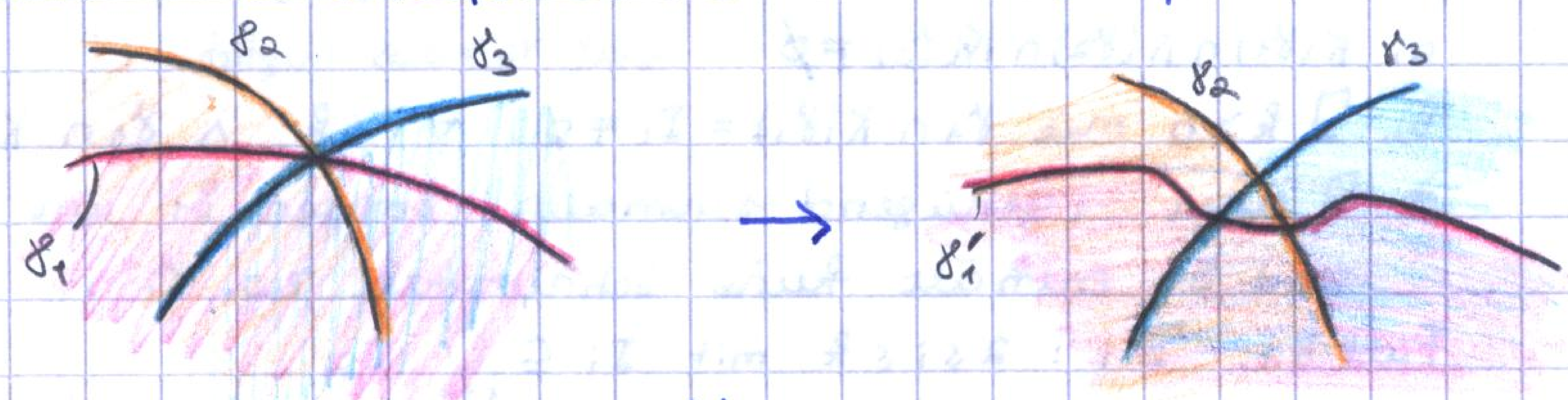
a). Keine drei Kurven schneiden sich in einem Pkt.

b) Zwei Kurven schneiden sich entweder in zwei Pkten oder gar nicht. (d.h. keine Berührpkte).

Dies sind keine echten Einschränkungen, da sich jede Menge Γ durch minimale lokale Verfeinerungen in allgemeine Lage versetzen läßt ohne die Zahl der äußeren Ecken $E(\Gamma)$ zu ändern.

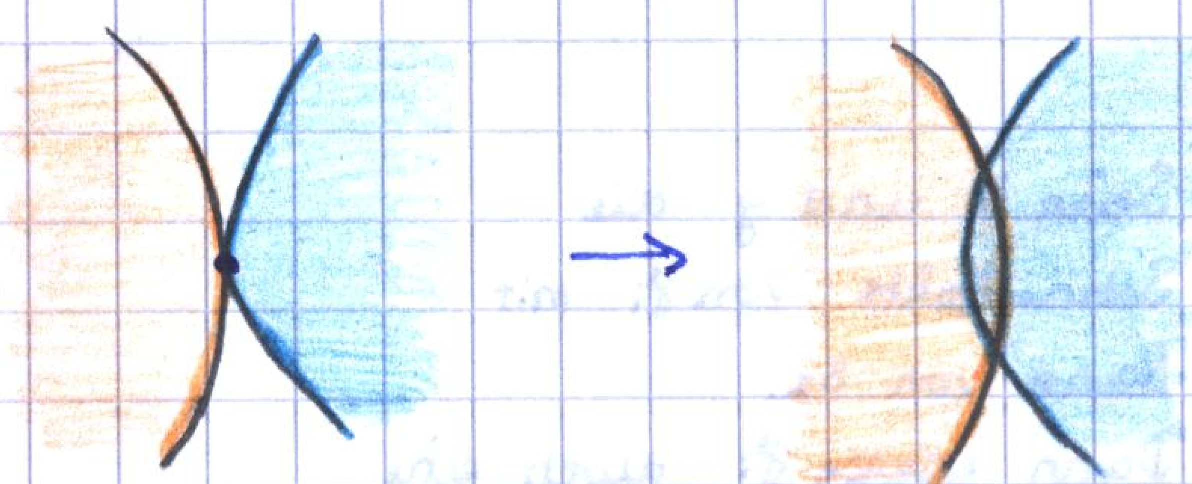
Bsple hierzu:

zu a): Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 = \{p\}$



ersetze γ_1 durch γ_1'
↑
vollkommen verdeckt.

zu b):



Berührpkt p Zwei Schnittpkte.

2. Wir zeigen nun den Satz durch Induktion über die Tripel (r_1, r_2, r_3) in lexikographischer Ordnung. Die Idee für den Induktionsschritt besteht darin, dass eine der Zahlen r_1, r_2, r_3 durch Streichen oder Verformen einer Kurve γ_i vermindert wird, so dass $E(\Gamma)$ höchstens wächst. (sich nicht verkleinert also).

Indanf: Wir zeigen die Beh für $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 \geq 0$.

Es gilt: a) keine redundanten Kurven

b) $K(\gamma_i) \cap K(\gamma_j) \cap K(\gamma_k) = \emptyset \quad \forall\ 1 \leq i < j < k \leq n$.

c) $E(\Gamma) = I(\Gamma)$ (folgt aus b).).

$\forall\ \gamma_i$ sieht die Situation wie folgt aus:

Wir konstruieren einen planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1 .. v_n\}$, wobei v_i beliebiger Pkt in $K(\gamma_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} Int(\gamma_j)$ und $E = \{(v_i, v_j) : \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset\}$

Planarität: Zeichne Kanten als Linien durch Schnittflächen $K(\gamma_i) \cap K(\gamma_j)$.

$\Rightarrow$ a) G ist planar

b). jeder Kante werden genau zwei Schnittpkte aus $E(\Gamma)$ zugeordnet.

$\Rightarrow |E(\Gamma)| = 2 \cdot |E| \leq 2 \cdot (3n-6) = 6n-12$.