Ind.schritt: Sei Γ eine beliebige Menge von n Jordankurven, die sich paarw. nicht oder zweimal schneiden.
Sei $R(\Gamma) := (r_1, r_2, r_3)$.
Indann: Beh. gilt $\forall\ \Gamma'$ mit $R(\Gamma') <_L R(\Gamma)$

Fall 1: $r_1 > 0$

hier nur r_1 verkleinert $\Rightarrow$ "$<_L$"

$\Rightarrow \exists\ \gamma_i \in \Gamma$ mit γ_i redundant

Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\gamma_i\} \Rightarrow E(\Gamma') = E(\Gamma) \wedge R(\Gamma') <_L R(\Gamma)$, $|\Gamma'| = n-1$

$\Rightarrow E(\Gamma) = E(\Gamma') \underset{\text{Indann}}{\leq} 6(n-1)-12 = 6n-6-12 \leq 6n-12.$

Fall 2: $r_1 = 0 \wedge r_3 > 0$ (Bem: Fall $r_1 = r_3 = 0$ war Ind.anf.)

Wir können oBdA annehmen (durch geeignete Nummerierung der γ_i):

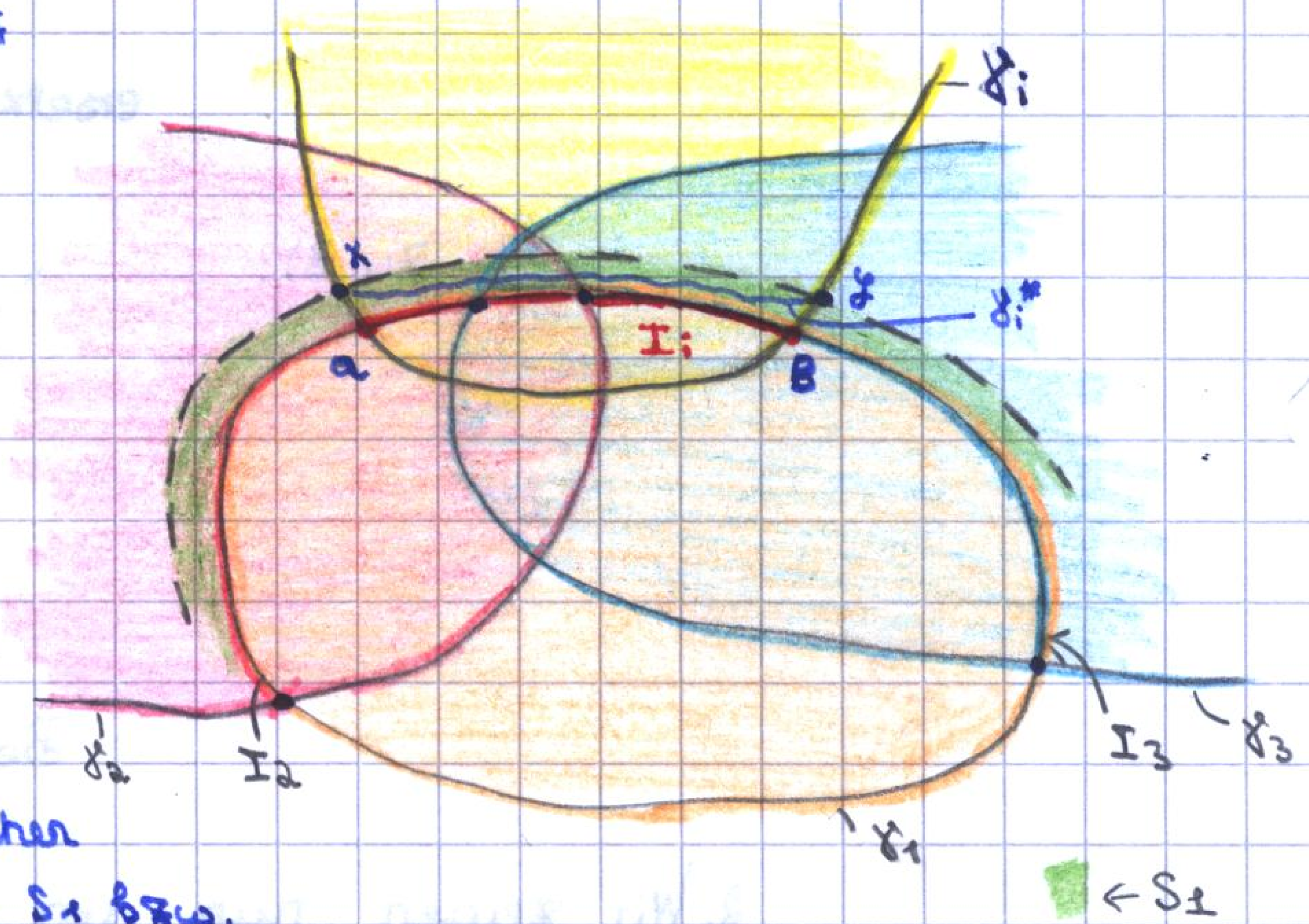
a) $K(\gamma_1) \cap K(\gamma_2) \cap K(\gamma_3) \neq \emptyset$ weil $r_3 > 0 \Rightarrow$ möglich

b). $\exists\ k \geq 0$ mit $\gamma_1 \cap K(\gamma_i) = I_i \neq \emptyset\ \forall i \leq k \wedge \gamma_1 \cap K(\gamma_j) = \emptyset\ \forall j > k$.

$\Rightarrow \exists$ einen (genügend schmalen) Streifen S_1 um die Kurve γ_1 mit $S_1 \cap \gamma_j = \emptyset\ \forall j > k$ und S_1 enthält keine Schnittpkte. zw. γ_i's.

Fall 2.1: $\exists\ i : 2 \leq i \leq k$ mit $I_i \subseteq \bigcup_{j=2, j\neq i}^{k} I_j$

Bsp:



Seien x und y die Schnittpkte von γ_i mit Rand von S_1.
Dann ersetze γ_i durch eine Kurve γ_i^*.
Ersetze das Stück von γ_i zwischen x und y, das innerhalb von S_1 bzw. $K(\gamma_1)$ verläuft, durch eine Kurve, die x und y im Inneren von S_1 verbindet.

Dann gilt für $\Gamma' := (\Gamma \setminus \{\gamma_i\}) \cup \{\gamma_i^*\}$:

a) $r_1(\Gamma') = r_1(\Gamma)$ (γ_i redundant $\Leftrightarrow \gamma_i^*$ redundant).

b) $r_2(\Gamma') < r_2(\Gamma)$ da $\gamma_i \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ aber $\gamma_i^* \cap \gamma_1 = \emptyset$ und alle anderen Schnittpkte bleiben erhalten.

$\Rightarrow E(\Gamma) = E(\Gamma')$ da die Schnittpkte a, b von $\gamma_i \cap \gamma_1$ verdeckt waren

$\Rightarrow E(\Gamma) = E(\Gamma') \underset{\text{Indann.}}{\leq} 6n-12$

Fall 2.2: $\forall\ 2 \leq i \leq k$: $I \not\subseteq \bigcup_{j=2, j\neq i}^{k} I_j$

bei entspr. Nummerierung

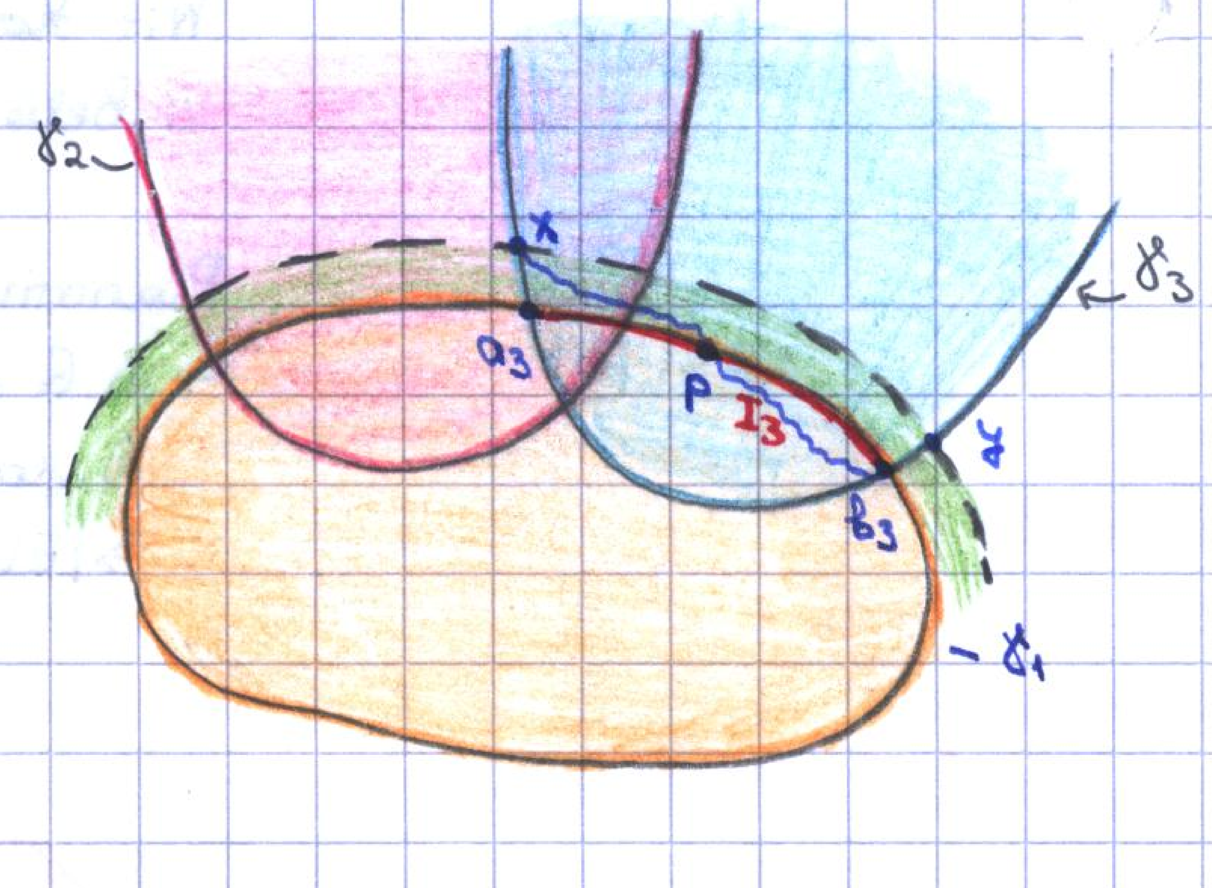
$\Rightarrow \exists\ p \in I_3$ mit $p \notin I_j$ für $j \neq 3$ wg.

Sei $I_3 = (a_3, b_3)$ und x, y Schnittpkte von γ_3 mit Rand von S_1

Verfeinere γ_3 zu γ_3^* wie folgt:
ersetze das Stück zwischen x und b_3 durch zwei Kurvenstücke:

a) von x nach p innerhalb S_1

b) von p nach b_3 innerhalb $K(\gamma_1)$



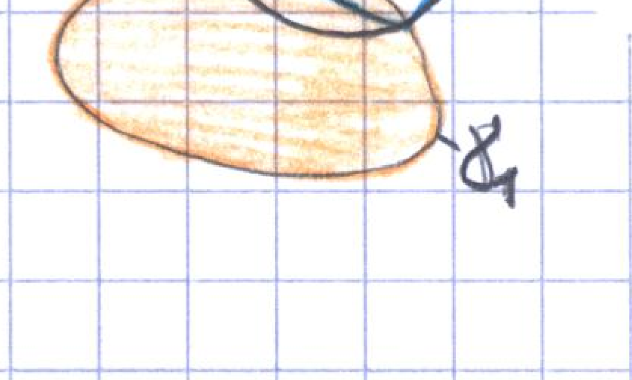
Dann gilt für die (entsprechende) entstandene Menge Γ':

a) $r_1(\Gamma') = r_1(\Gamma)$ weil γ_3 redundant $\Leftrightarrow \gamma_3^*$ redundant

b) $r_2(\Gamma') = r_2(\Gamma)$ $(a_3, b_3) \rightsquigarrow (p, b_3)$, sonst nix verändert $\Rightarrow$ # Schnpkte gleich.

"=" ? c) $r_3(\Gamma') < r_3(\Gamma)$

d) $E(\Gamma) < E(\Gamma')$ Weil: p ist ein neuer extremer Schnittpkt!
(Wg. Loch ist p Randpkt!)



$\Rightarrow E(\Gamma) < E(\Gamma') \underset{\text{Indann.}}{\leq} 6n-12.$