Schritte:

1. $p = (x,y) \longmapsto (x, y, x^2+y^2) = p'$
2. Berechne konv. Hülle von $S' = \{p' : p \in S\}$.
   $\Rightarrow$ Alle Pkte sind Ecken der Hülle und jede Fläche der Hülle entspricht dem Dreieck der Delaunay-Triangulierung.
3. Projiziere die Kanten der Hülle zurück in die Ebene (ignoriere z-Koordinaten).

Das liefert ein alternatives Verfahren zur Berechnung von Delaunay-Triangulierungen.

6.3.4. Geometrisches Prädikat:

size-of-circle (a,b,c,d)

$a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$ (a,b,c nicht collinear) definieren gerichteten Kreis.

Frage: Wo liegt d? (Bzgl. der Kreislinie)

$\Rightarrow$ links: $+1$, auf: 0, recht: -1.

Implementierung:

Lifte a,b,c,d auf Paraboloid $\rightarrow a',b',c',d'$

$$\text{sizeofcircle}(a,b,c,d) = \text{orientation}(a',b',c',d') = \operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x^2+a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2+b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2+c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2+d_y^2 & 1 \end{vmatrix}$$

6.4. Arrangements und Dualität:

(2 weitere Anwendungen der Dualität).

6.4.1. Problem 1

$\longmapsto$ **6.4.1.1. Problem:** Geg: $p_1 .. p_n \in \mathbb{R}^2$

Frage: Liegen drei Pkte auf einer gemeinsamen Geraden?

d.h. $\exists\, p_i, p_j, p_k$ mit $i<j<k$ u. $p_i p_j p_k$ collinear.

$\longmapsto$ **6.4.1.2 Einfache Lsg:**

Test $\forall$ Tupel $(a,b,c) \in S^3$ ob orientation$(a,b,c) = 0$

$\Rightarrow$ Zeit $O(n^3)$

$\longmapsto$ **6.4.1.3 Bessere Lsg:**

Betrachte alle Paare $(a,b) \in S^2$ mit $a \neq b$ und sortiere die entsprechenden Geraden nach ihrer Steigung.

$\Rightarrow n^2$ Geraden.

Test: durchsuche sortierte Liste der Geradengleichungen nach 3-fach Vorkommen.

Laufzeit: 1) Sortieren: $O(n^2 \log n)$ $\quad O(n^2 \log n^2) = O(n^2 \cdot 2\log n) = O(n^2 \log n)$

2) lineare Suche $O(n^2)$

$\Rightarrow$ Gesamt: $O(n^2 \log n)$

$\longmapsto$ **6.4.1.4. Dualität:**

$S = \{p_1 .. p_n\}$.

Betrachte die dualen Geraden $L = \{\ell_1 .. \ell_n\}$, $\ell_i = \mathcal{D}(p_i)$

3 Pkte p_i, p_j, p_k sind colinear $\Leftrightarrow$ 3 Geraden schneiden sich in einem Pkt.

wg. Folgerung Kap 1.

$\longmapsto$ **6.4.1.5 Algorithmus:**

Betr. die n dualen Geraden $\ell_1 .. \ell_n$ und die Zerlegung der Ebene durch diese Geraden. ($\rightarrow$ Arrangement der Geraden) $O(n^2)$ Zeit um Schnpkte zu bestimmen

$\Rightarrow$ Planarer Graph $G = (V,E)$ mit $|V| \le n^2$ (# Schnpkte $\le n^2$)

$\Rightarrow |E| \le 3n^2 - 6 = O(n^2)$

3 Pkte in S sind colinear $\Leftrightarrow \exists$ Knoten $v \in V$ mit degree$(v) > 4$.

Test in $O(n^2)$: teste alle Knoten von G.

Problem: Aufbau von G.

Lösung: Modifiziertes Plane Sweep (Segmentschnitt)

- Sweep startet bei $-\infty$ mit Y = Liste der Geraden nach Steigung absteigend sortiert
- Event-Pkte: nur Schnittpkte ($O(n^2)$)
- Sweep endet, wenn Y nach Steigung aufsteigend sortiert