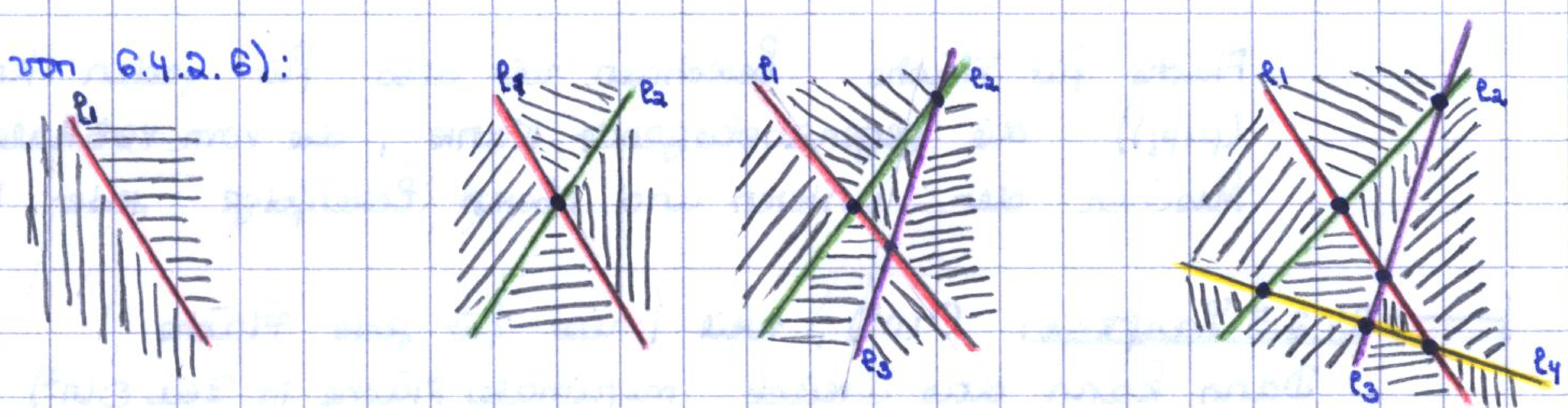
6.4.2.8 Laufzeit: Kosten für einfügen von ℓ_i sind proportional zur Anzahl der im Schritt 2. durchlaufenen Kanten (Größe der Zone von ℓ_i)
Sei m_i diese Anzahl.

6.4.2.9 Lemma: $m_i \leq 5i$ "Zone-Lemma."

6.4.2.10 Beispiel: (Fortsetzung von 6.4.2.6):

$A_1 = \{\ell_1\}$
$A_2 = \{\ell_1, \ell_2\}$
$A_3 = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$
$A_4 = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$



A_1 A_2 A_3 A_4

Beweis:

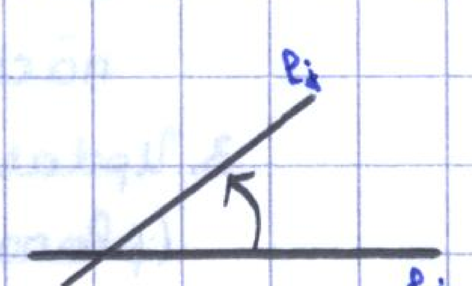
Sei F die Menge der Flächen von A_i oberhalb (positive Seite) von ℓ_i, deren Rand an ℓ_i grenzen. Dann ist ist m_i die Zahl alle Kanten von Flächen in F.
Im Bsp: A_4: 4 Flächen, $m_4 = (\ell_1, \ell_2, \ell_4) + (\ell_4, \ell_2, \ell_1, \ell_3) + (\ell_4, \ell_3, \ell_1) + (\ell_4, \ell_1, \ell_2) = 13$

Partitioniere diese Kantenmenge in zwei Teile:
E_1: Kanten mit mindestens einem Endpkt auf ℓ_i in A_4: $(\ell_4, \ell_2), (\ell_2, \ell_4, \ell_3), (\ell_3, \ell_4, \ell_1), (\ell_1, \ell_4)$
Beobachtung:
a). jede Fläche in A_{i-1}, die von ℓ_i geschnitten wird, trägt maximal drei Kanten zu E_1 bei.
b). höchstens i Flächen werden von ℓ_i geschnitten
$\Rightarrow |E_1| \leq 3 \cdot i$

E_2: alle anderen Kanten. in A_4: $(\ell_1), (\ell_1), (\ell_3 \ell_2)$
$O(i)$ pro Fläche ist möglich.
Wir zeigen: $|E_2| \leq 2 \cdot i$
Dazu zerteilen wir E_2 weiter in E_ℓ und E_r
E_ℓ: alle Kanten in E_2 so, dass der Schnittpkt der unterstützenden Geraden mit ℓ_i links von der entsprechenden Fläche liegt. $(\ell_3, \ell_2), (\ell_1)$
E_r: analog mit Schnittpkt rechts. $(\ell_1), (\ell_1)$
(Parallele Segmente (falls vorhanden) zu E_ℓ)

Hilfslemma: a) $|E_\ell| \leq i$
b) $|E_r| \leq i$.

Beweis: durch Induktion über i
Ind.anf: $i = 1 \Rightarrow |F| = 1 = m_1 \Rightarrow |E_1| = 0 = |E_2| \leq 2 \cdot 1 = 2$ ✓
Ind.schritt:
Betrachte A_{i-1} = Arrangement für $\{\ell_1 .. \ell_{i-1}\}$
Wir fügen nun die i-te Gerade ℓ_i hinzu.
Zurückführung auf Induktionsannahme:
Wähle die Gerade ℓ_j $1 \leq j \leq i-1$, die mit ℓ_i den kleinsten Winkel (oberhalb von ℓ_i und rechts von ℓ_j) bildet



Ab hier Beweis für E_r (E_ℓ analog):
Sei E_r' die E_r Menge beim Einfügen von ℓ_i in Arrangement von $\{\ell_1 .. \ell_{i-1}\} \setminus \{\ell_j\}$.
Ind. ann. $\Rightarrow |E_r'| \leq i-1$

Frage: Wie verhalten sich $|E_r'|$ und $|E_r|$ zueinander?