Algorithmische Geometrie

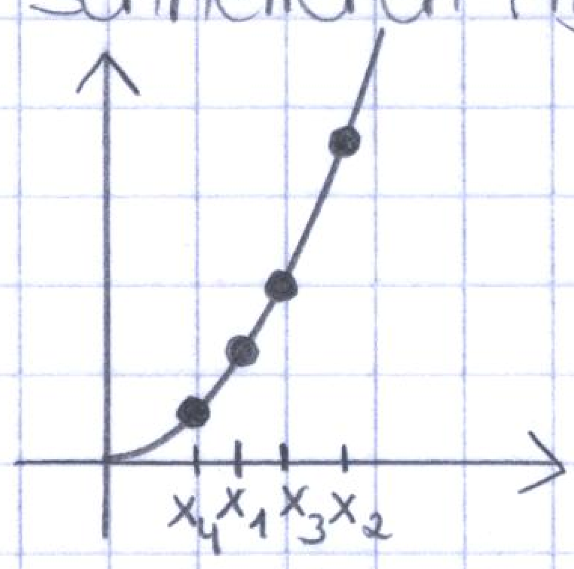
Algorithmen und Datenstrukturen zur Lsg geom. Probleme

- Typische Probleme:
  - Konvexe Hülle berechnen
  - Schnittprobleme (Segmente, Polygone)
  - Suchprobleme (Post Office)
  - Bewegungsplanung (Robotor durch Hindernisse hindurch)
  - Maßproblem
- Grundlegende Ansätze:
  - Divide & Conquer
  - Plane Sweep
  - Dualität
  - ~~Degenerierte Eingaben~~

1. Konvexe Hüllen

1.1 Konstruktion der konv. Hülle einer Pktmenge im $\mathbb{R}^2$

- Definition:
  $S \subset \mathbb{R}^2$ heißt konvex $\Leftrightarrow \forall p, q \in S$ gilt: $\overline{pq} \subseteq S$
- Definition:
  Die konv. Hülle von $S \subset \mathbb{R}^2$ ist die kleinste konv Menge die S enthält.
- Satz:
  Der Rand von $CH(S)$ ist ein konv Polygon mit Ecken aus S.
  Im $\mathbb{R}^3$ ist $CH(S)$ ein konv Polyeder mit Ecken aus S.
  Beweis: Trivial
- Konvexe-Hülle-Problem:
  Berechne Folge der Ecken von $CH(S)$ gegen UZS, pos. orient.
- Satz:
  Berechnung der konv Hülle von n Pktn im $\mathbb{R}^2$ ist mind. so schwer wie Sortieren von n reellen Zahlen.
  Beweis:
  Man reduziert das Problem der konv Hülle auf die Sortierung von Zahlen und zeigt, dass ein schnellerer Alg für das Problem der konv Hülle einen schnelleren Alg für das Sortieren liefern würde, was nicht möglich ist.



Man geht von $x_1, \dots, x_n$ über nach $(x_1, x_1^2), \dots, (x_n, x_n^2)$. Für diese Pkte konv Hülle bestimmen
$\Rightarrow$ Jeder Pkt gehört dazu, der Alg. liefert beginnend beim Pkt mit kleinster x-Koord. gegen UZS die konv Hülle.
Diese Reihenfolge ist gleichzeitig aufsteigende Sortierung der Zahlen $x_1, \dots, x_n$ (wenn man 2. Koord. streicht)

$\Rightarrow$ Mit jedem Alg zur Bestimmung der konv. Hülle kann man Zahlen sortieren.
Da Sortierprobleme $\Omega(n \log n)$ Vergleiche im schl. Fall brauchen, kann das Problem der konv. Hülle nicht leichter sein als das Sortieren