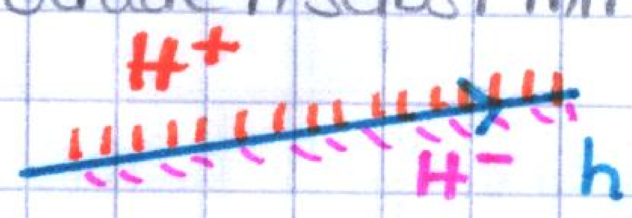
1.2 Schnitt von n Halbebenen mit Anwendung von CONVEX-HULL

Problem:

- Geg.: n Halbebenen $H_1, \dots, H_n$ im $\mathbb{R}^2$
- Ges.: $P = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ bzw. die Folge der Ecken von P gegen den UZS

- **Definition:**
  Eine Halbebene H ist die Menge aller Pkte auf der gleichen Seite einer Geraden h, incl. der Geraden selbst
  Da die Gerade h selbst mit dazugehört, ist die Halbebene H abgeschlossen.



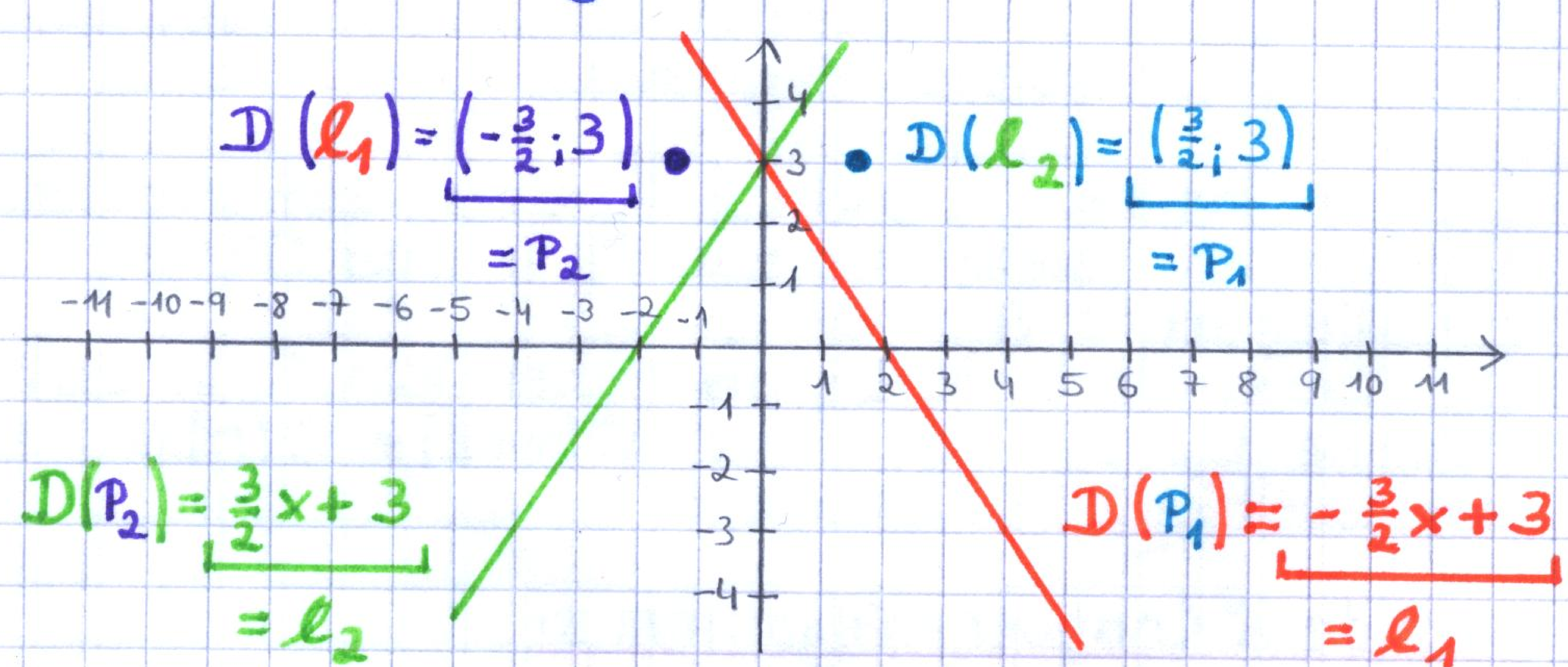
- **Beobachtung:**
  Der Schnitt $P = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ ist ein konvexes (evtl. unbeschränktes) Polygon.
  Beachte: Der Schnitt 2er konvexer Mengen ist konvex !!

1.2.1 Dualität

geom. Transformation, die Pkte in Geraden und Geraden in Pkte umwandelt

- **Definition:**
  - $\ell = ax + b \Rightarrow D(\ell) = (a, b)$ dualer Pkt zur Geraden ℓ
  - $p = (a, b) \Rightarrow D(p) = -ax + b$ duale Gerade zum Pkt p

- **Veranschaulichung:**

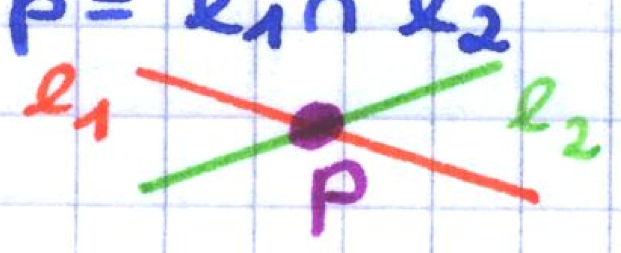


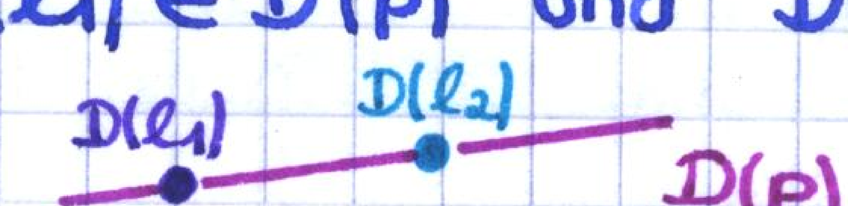
(*) **Lemma:**

p liegt $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{auf}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right.$ einer $\overbrace{\text{Geraden}}^{\text{nicht vertikalen}}$ $\ell \Leftrightarrow$ Gerade $D(p)$ liegt $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{auf}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right.$ Pkt $D(\ell)$

(**) **Folgerung:**

$p = \ell_1 \cap \ell_2 \Leftrightarrow D(\ell_1) \in D(p)$ und $D(\ell_2) \in D(p)$





Beweis:

Sei $p = (p_x, p_y)$, $\ell = ax + b$

$\Rightarrow D(p) = -p_x x + p_y$, $D(\ell) = (a, b)$

p liegt $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{auf}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right.$ Geraden $\ell \Leftrightarrow p_y \gtreqless a \cdot p_x + b \Leftrightarrow -p_x \cdot a + p_y \gtreqless b$

$\Leftrightarrow$ Gerade $D(p)$ liegt $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{auf}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right.$ Pkt $D(\ell)$