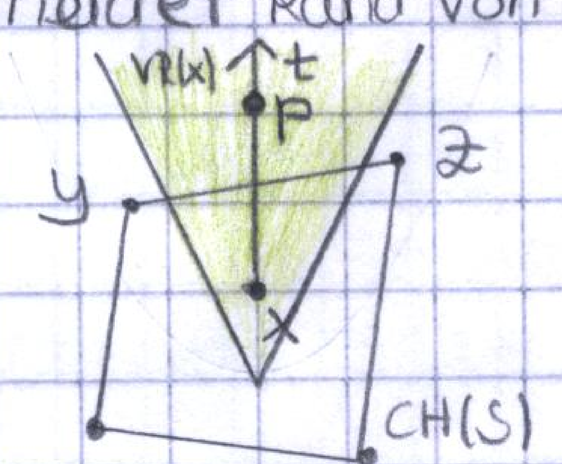
- **Definition:**
  Das Voronoi-Diagramm für eine Menge S von n Orten $VD(S)$ ist die planare Unterteilung der Ebene, die durch die Voronoi-Regionen $VR(x)$ $\forall x \in S$ definiert wird.
  Ein Voronoi-Diagramm ist ein planarer Graph, dessen Flächen die Voronoi-Regionen sind
  Voronoi-Kanten:
  Eine Kante wird durch 2 Orte a und b definiert.
  Sie ist ein Abschnitt der Mittelsenkrechten von $\overline{ab}$.
  Voronoi-Knoten:
  Ein Knoten wird mind. durch 3 Orte a, b und c definiert.
  Er ist der Schnittpkt der Mittelsenkrechten von $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ und damit Mittelpkt des Umkreises durch a, b und c.
  Zu diesem Knoten haben die 3 Orte a, b und c jeweils den gleichen Abstand.

- **Lemma:**
  - Für jeden Ort $x \in S$ gilt:
    $VR(x)$ ist unbeschrkt $\Longleftrightarrow$ x ist Ecke oder liegt auf dem Rand von $CH(S)$
  - Ein VD für n Orte hat:
    - $\leq 2n-4$ Knoten
    - $\leq 3n-6$ Kanten Eigenschaft von planaren Graphen

    $\Rightarrow$ VD haben linear viele Knoten und Kanten.

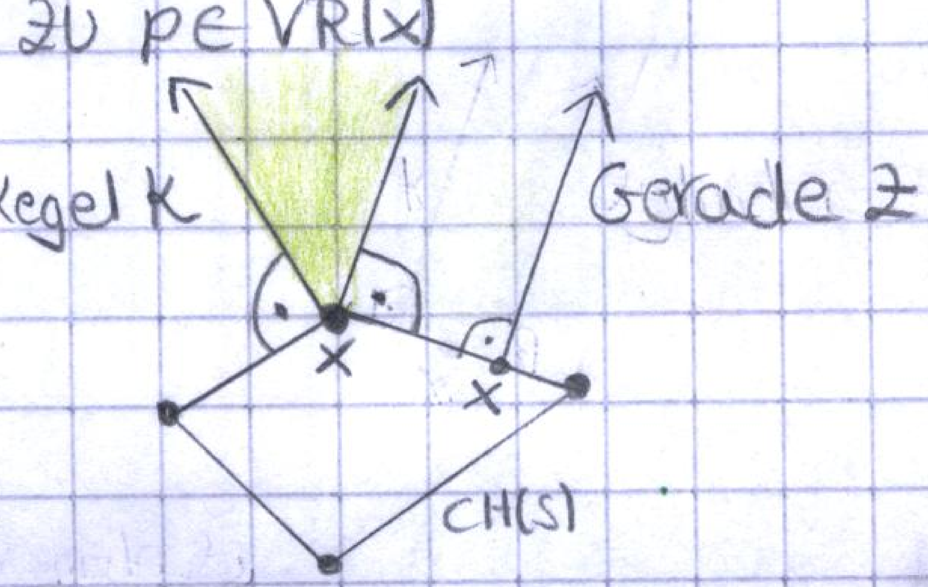
Beweis:

- „$\Rightarrow$": Ann.: x liegt im Inneren von $CH(S)$
  $VR(x)$ ist konvex und nach VS unbeschrkt
  $\Rightarrow \exists$ Strahl t der in x startet und ganz in $VR(x)$ verläuft.
  Nach Ann liegt x im Inneren von $CH(S)$
  $\Rightarrow$ Strahl t schneidet Rand von $CH(S)$ in Kante (y, z) mit $y, z \in S$



  $\Rightarrow \exists$ Pkt p auf Strahl t der näher zu y oder zu z als zu x ist
  $\Rightarrow$ ↯ zu $p \in VR(x)$

  „$\Leftarrow$":



  bzw die Pkte auf der Geraden z

  Betr. Kegel K zwischen den Senkrechten auf den zu x benachbarten Kanten ↲
  Alle Pkte in K/z liegen näher zu x als zu allen anderen Orten in S.
  $\Rightarrow K/z \subseteq VR(x)$
  $\Rightarrow VR(x)$ ist unbeschrkt, da K/z unbeschrkt

- Sei $G = (V, E)$ der duale Graph zu $VD(S)$, dh es gilt:
  $V = S$ und $(x, y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$ und $VR(y)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante
  $\Rightarrow G$ ist planarer Graph und jede Kante $e \in E$ entspricht genau einer Voronoi-Kante (nach Konstruktion von G)
  $\Rightarrow$ Jeder planare Graph mit n Knoten hat max $3n-6$ Kanten (Euler-Formel)
  Außerdem hat jeder Voronoi-Knoten mind Grad 3 (weil er durch mind. 3 Orte def ist)
  $\Rightarrow 3\,\#\text{Knoten} \leq \sum_{v \in S} \text{Grad}(v) = 2\,\#\text{Kanten} \leq 2(3n-6) = 6n-12$
  $\Rightarrow \#\text{Knoten} \leq 2n-4$

  □