Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2013/14

Übung 5

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Eine bijektive Funktion, die von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ abbildet heißt *Pairing-Funktion*. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion eine Pairing-Funktion ist:

$$r(x, y) = \frac{1}{2} \cdot ((x + y)^2 + x + 3y).$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Pairingfunktion r aus Aufgabe 1 LOOP-berechenbar ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei r wieder die Pairingfunktion aus Aufgabe 1.

1. Konstruieren Sie mit Hilfe von r eine bijektive Funktion $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. Ein *Stack* ist eine Liste $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ von natürlichen Zahlen, auf dem die Funktionen *empty*, *top*, *push* und *pop* definiert sind.
   - *empty* gibt an, ob der Stack leer ist; also $\textit{empty}([\,]) = 1$ und $\textit{empty}([a_0, \ldots, a_k]) = 0$.
   - *top* gibt das oberste Element des nicht-leeren Stacks aus; $\textit{top}([a_0, a_1, \ldots, a_k]) = a_k$.
   - *push* legt eine neue Zahl auf den Stack; $\textit{push}([a_0, a_1, \ldots, a_k], b) = [a_0, a_1, \ldots, a_k, b]$.
   - *pop* entfernt das oberste Element des nicht-leeren Stacks; $\textit{push}([a_0, a_1, \ldots, a_k]) = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}]$.

   Wie kann man unter Verwendung von r einen Stack durch eine einzige natürliche Zahl simulieren? Formaler gefragt: geben Sie eine injektive Funktion von der Menge aller Stacks in die natürlichen Zahlen an und definieren Sie die Funktionen *empty*, *top*, *pop* und *push* entsprechend auf den natürlichen Zahlen.