Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2013/14

Übung 1

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Zwei Mengen A und B sind *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Welche der folgenden Mengen sind gleichmächtig?

$\{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$ $\{q \mid 1 \leq q \leq 5, q \in \mathbb{Q}\}$ $\{r \mid 1 \leq r \leq 5, n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ $\{P \mid P$ ist ein Java-Programm$\}$

$\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}, f$ wird von einem Java-Programm berechnet$\}$

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Eine Menge A ist *abzählbar*, wenn sie endlich oder gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für jede Menge A äquivalent sind:

1. A ist eine abzählbare Menge.
2. Es gibt eine injektive Funktion $f : A \to \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Funktion $g : \mathbb{N} \to A$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn B abzählbar ist und $A \subseteq B$, dann ist auch A abzählbar.
2. Die Menge aller endlichen Texte ist abzählbar.
3. Die Menge aller Java-Programme ist abzählbar.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $g_r : I\!N \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ die Funktion mit $g_r(m) =$ "die m-te Stelle in der Dezimalbruchentwicklung von r". Zum Beispiel ist $g_{2\frac{1}{3}}(1) = 2$ und $g_{2\frac{1}{3}}(123456) = 3$.
Man zeige:

1. Für jede rationale Zahl q gilt: g_q ist intuitiv berechenbar.
2. Es gibt eine reelle Zahl r, für die g_r nicht intuitiv berechenbar ist.