

# Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2013/14

## Übung 3

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion auch von einer Turingmaschine berechnet wird, die in jedem Schritt den Schreib/Lese-Kopf entweder eine Position nach links oder eine Position nach rechts bewegt (die Kopfbewegungen sind also in  $\{L, R\}$ ).
2. Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion auch von einer Turingmaschine berechnet wird, die zwei Bänder und nur die beiden Zustände  $z_0$  (Startzustand) und  $z_e$  (Endzustand) besitzt.

### Aufgabe 2: (6 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden LOOP-Programme  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Bestimmen Sie den Wert der Variablen  $x_0$  bei Beendigung des Programms, wenn mit  $x_1 = 3$  gestartet wird. Welche Funktionen berechnen die Programme?

$P_1$ :

```
 $x_0 := x_1$  ;  
LOOP  $x_0$  DO  
   $x_0 := x_0 + 1$   
END
```

$P_2$ :

```
 $x_0 := x_1$  ;  
LOOP  $x_0$  DO  
  LOOP  $x_0$  DO  
     $x_0 := x_0 + 1$   
  END  
END
```

$P_3$ :

```
 $x_0 := x_1$  ;  
LOOP  $x_0$  DO  
  LOOP  $x_0$  DO  
    LOOP  $x_0$  DO  
       $x_0 := x_0 + 1$   
    END  
  END  
END
```

### Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die Firma LOOPSOFT verkauft die Programmiersprache LOOP++. Zusätzlich zu den Anweisungen von LOOP-Programmen ist in LOOP++ noch das Konstrukt

IF  $x_i = 0$  THEN  $A$  ELSE  $B$  END

erlaubt (mit der "natürlichen" Semantik). Dabei sind  $A$  und  $B$  beliebige LOOP++-Programme. Der Preis von LOOP++ ist wesentlich höher als der von LOOP. Ist der höhere Preis gerechtfertigt, oder können LOOP++-Programme auch nicht mehr Funktionen berechnen als LOOP-Programme?

### Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine WHILE-berechenbare injektive totale Funktion. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  ebenfalls WHILE-berechenbar ist.

Gilt das gleiche auch für LOOP-berechenbare Funktionen?