Grundlagen der Telekommunikation

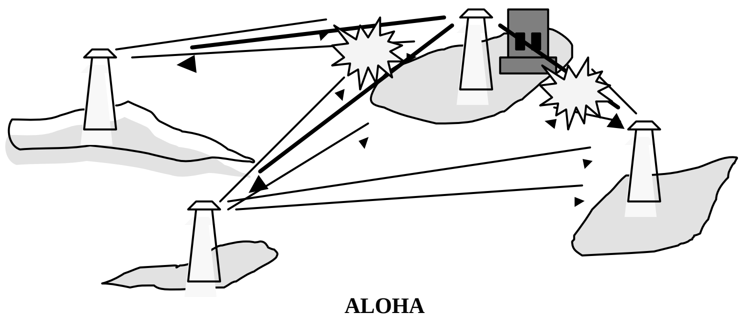
Stochastische Modellierung I

— Anwendungsteil —

Nachrichten- und Signalübertragung
Fehlerbehandlung
Vermittlungstechniken
Netztypen und Übertragungsmedien
Hochleistungsnetze
Mobilfunksysteme

WS 2000 / 2001

Vom ALOHA-Prinzip zum ETHERNET



ALOHA

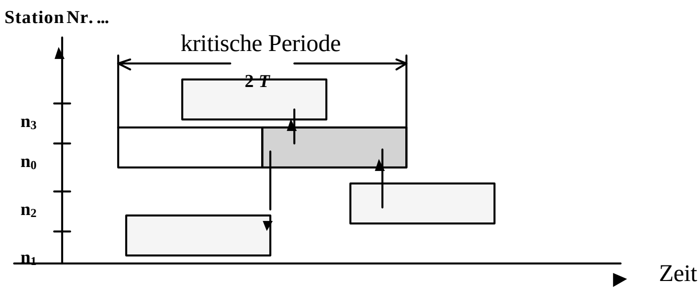
Elementare Analysen

Annahmen:
1. Approximativ unendliche Anzahl von Stationen.
2. Versendet werden stets Pakete gleicher Länge.
3. Jede Station, die ein Paket zum Versenden bereitgestellt bekommt, beginnt sofort mit der Übertragung — ohne Beeinflussung durch andere Stationen.
4. Übertragungen werden nur durch Kollisionen gestört (keine sonstigen Fehlerquellen).
5. Kollisionen werden über Negativ-Quittierung durch den Empfäger festgestellt; eine Station, deren Übertragungsversuch erfolglos war, gilt als *geblockt*. Geblockte Stationen versuchen Re-Übertragungen nach gleichem Verhaltensmuster wie ungeblockte Stationen bzgl. neuer Übertragungen.
6. Bezeichnet man einen Übertragungsversuch als *Ankunft* im System, so bildet der Gesamt-Ankunftsstrom aus Übertragungsversuchen von ungeblockten und geblockten Stationen einen Poisson-Strom der Intensität G.
7. Als Zeiteinheit werde die Dauer T einer (erfolgreichen) Paketübertragung gewählt; die Anzahl der pro Zeiteinheit T erfolgreich übertragenen Pakete heißt der Durchsatz S .

<u>Pure ALOHA</u>

$S = p_0 \cdot G$ (p_0 = Wahrscheinlichkeit des Erfolges einer Übertragung)

p_0 ist offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine andere Station während zweier Zeiteinheiten T einen Übertragungsversuch startet.



Poisson-Ankunftsstrom ? $p_0 = e^{-2G}$

? $$\boxed{S = G\ ?\ e^{-2G}}$$

Welches Optimum kann für *S* erreicht werden? Zu variieren ist offenbar nur *G*

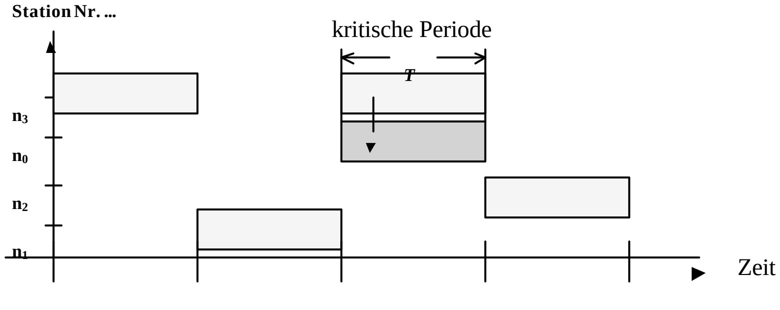
? $$\frac{d}{dG}\left(G\ ?\ e^{-2G}\right) = 0 \text{ bzw. } e^{-2G}\ ?\left(1 - 2G\right) = 0, \qquad G_0 = \frac{1}{2}$$

? $$\boxed{S_o = 0.5\ ?\ e^{-1}\ ?\ 0.184}$$

Unter den genannten Annahmen ist für das „reine ALOHA-System“ somit nur eine Erfolgswahrscheinlichkeit von ca. 18 % zu erreichen.

Slotted ALOHA

Verbesserung durch **Taktung der Übertragungen**:
Ein Signalgeber versendet im Rundruf-Modus („broadcast“) Taktsignale im Abstand einer Paketübertragungszeit *T*. Übertragungen dürfen nur zu Taktbeginn gestartet werden. Vernachlässigt man die Signallauf-Unterschiede zu den verschidenen Stationen, so ergibt sich folgendes Bild:



? $S = p_0 \cdot G$ mit $p_0 = e^{-G}$, d.h. $S = G \cdot e^{-G}$

? $\frac{d}{dG} S(G) = 0$ liefert $e^{-G} ? (1 - G) = 0$ und $G_0 = 1$,

$$\boxed{S_0 = e^{-1} ? 0.368}$$

?

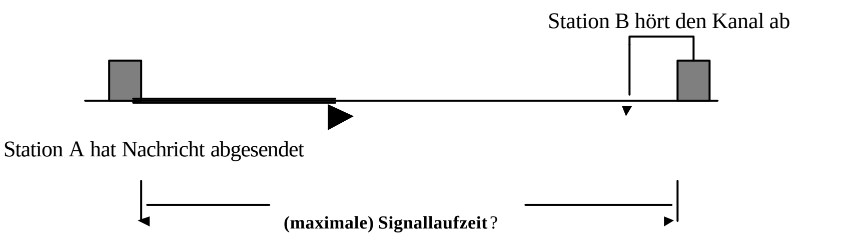
Optimaler Durchsatz durch slotted ALOHA-System bei etwa 0.368, d.h. ein Übertragungsversuch hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von ca. 37 %.

Dies sind Ergebnisse unter sehr vereinfachenden Annahmen. Tatsächlich sind ALOHA-Systeme unter hoher Last nicht stabil insofern, als durch zunehmende Anzahl geblockter Stationen die Erfolgswahrscheinlichkeit gegen Null konvergieren kann.

Das “listen-before-talk“ - Prinzip :

<u>“Carrier Sense Multiple Access“ (CSMA) – Systeme</u>

Vor einer Übertragung wird der Kanal abgehört, so daß Kollisionen nur noch durch das Nichterkennen laufender Übertragungen verursacht werden können. Nichterkennen ist möglich aufgrund nichtverschwindender Signallaufzeiten.



Typen von CSMA-Systemen und deren Analyse

1. **Non - persistent CSMA**
2. **Slotted non-persistent CSMA**
3. **1 - persistent CSMA**
4. **Slotted 1 - persistent CSMA**
5. **p - persistent CSMA**
6. **CSMA / CD - Systeme**
7. **ETHERNET**

Kurzbeschreibung der Protokolle

I) 1-persistent CSMA
Sendebereite Station hört den Kanal beharrlich ab („listen before talk“ - Prinzip). Anschließend — bei als frei erkanntem Kanal — sofortiger Übertragungsversuch. Im Falle einer Kollision (die durch Ausbleiben einer positiven Quittung des Empfängers festzustellen ist) Neubeginn des gleichen Verhaltens nach Ablauf eines zufällig gewählten Zeitintervalles.

II) Non-persisten CSMA
Sendebereite Station hört den Kanal zunächst ab („listen before talk“ - Prinzip). Wird der Kanal als besetzt erkannt, so keine Fortsetzung des Abhörvorganges, sondern Warten für die Dauer eines zufällig gewählten Zeitintervalles, bis zur erneuten Wiederaufnahme des gleichen Verhaltens.
Wird der Kanal als frei erkannt, so erfolgt sofort ein Übertragungsversuch.
Im Falle einer Kollision gleiches Verhalten wie beim 1-persistent-Protokoll.

III) p-persisten CSMA
Dieses Protokoll findet nur bei getakteten Systemen („slotted CSMA“) Anwendung. Eine sendebereit gewordene Station hört zunächst den Kanal beharrlich ab, bis dieser als frei erkannt wird. Zu Beginn des darauf folgenden Zeit-Slots erfolgt mit Wahrscheinlichkeit *p* ein Übertragungsversuch, jedoch wird mit Wahrscheinlichkeit *1 - p* die Übertragung bis zum nächsten Slot-Beginn zurückgestellt, und das gleiche Verhalten wiederholt. Der Algorithmus wird nun solange angewendet, bis entweder die Paketübertragung startet oder aber der Kanal asl von einer anderen Station besetzt erkannt wird. Im letzteren Fall verhält sich die Station wie bei einer (durch Ausbleiben einer Quittung erkannten) Kollision, d.h. alle Aktivitäten werden um eine zufällig gewählte Zeitspanne zurückgestellt, um anschließend nach gleichem Algorithmus wieder zu beginnen.

Bemerkung: Nur eine durch das Einspeisen eines Paketes in den Ausgabepuffer Gerade sendebereit gewordene Station hört hier den Kanal beharrlich von Slot zu Slot bis zum Freiwerden ab, danach ändert sich bei besetztem Kanal das Verhalten!

Annahmen:

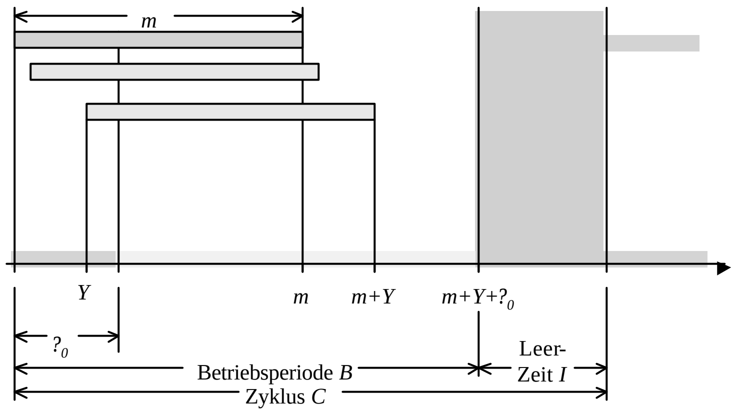
1. Sehr große Anzahl *N* von Stationen, d.h. approximativ ist *N* ˜ 8
2. Signallaufzeit zwischen je zwei beliebigen Stationen ist stets gleich $?_0$
3. Paketlängen sind konstant = *L*
4. Zu jedem Zeitpunkt hält eine Station höchstens ein (neu kreiertes oder zur wiederholten Übertragung anstehendes) Paket bereit
5. Schaltzeiten zwischen Übertragungszustand (inkl. “ Carrier Sensing“) und Empfangszustand sind vernachlässigbar
6. Übertragungskanal ist fehlerfrei, d.h. Störungen nur durch Kollisionen
7. Jede Überlappung von Paketübertragungen (auch bei nur wenigen Bits) bedeutet zerstörende Kollision
8. Gesamtankunftsstrom aus neu kreierten und wiederholt zu sendenden Paketen bildet einen Poisson-Strom der Rate *?*

Notation:

K = Kanalkapazität [bps]
$m = L / K$ = Paketübertragungszeit [sec]
$?_0$ = konstante Signallaufzeit zwischen je zwei Stationen
$G = ?\cdot m$ mittlere Gesamtanzahl von Paketankünften pro Paketübertragungszeit
S = mittlere Anzahl erfolgreicher Übertragungen pro Paketübertragungszeit, sog. normalisierter Durchsatz
$a = ?_0 / m$ normalisierte Signallaufzeit

Analyse für "non-slotted non-persistent CSMA"

Es wird eine Referenz-Paketübertragung betrachtet :



Y = Ankunftszeitpunkt des letzten mit dem Referenzpaket kollidierenden Paketes
$Y = 0$: Betriebsperiode mit erfolgreicher Übertragung; sonst : $0 < Y = ?_0$

Sei U die Zeitperiode in einem Zyklus C, während der der Kanal erfolgreich zur Übertragung benutzt wird; dann gilt

$$E[U] = p_s ? m \ ,$$

worin p_s die Erfolgswahrscheinlichkeit für ein zu übertragendes Paket ist:

$$p_s = e^{-? ?_0} = e^{-? m ? \frac{?_0}{m}} = e^{-G ? \frac{?_0}{m}} = e^{-G ? a}$$

Als normalisierten mittleren Durchsatz E[S] bezeichnet man den pro Zyklus anfallenden mittleren Zeitanteil erfolgreicher Nutzung des Kanals, d.h.

$$E[S] = \frac{E[U]}{E[C]} = \frac{E[U]}{E[B] + E[I]}$$

Es gilt, diesen mittleren normalisierten Durchsatz zu berechnen. Er ist — bei gegebenen Größen $?, m$ und a ein Maß für die Qualität des Übertragungssystems.

Es ist $B = Y + m + ?_0$, also $\mathrm{E}[B] = \mathrm{E}[Y] + m + ?_0$. Für $y > 0$ gilt nun

$$\boldsymbol{P}\{Y ? y\} =: F_Y(y) = \boldsymbol{P}\left\{\text{keine Übertragung im Intervall } (?_0 - y)\right\} ,$$

während $Y = 0$ gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit eines Erfolges ist. Für die Dichte-Funktion f_Y der Verteilung F_Y hat man daher den Ausdruck

$$f_Y(y) = u_0(y) \; ? e^{-G ? \frac{?_0}{m}} + \frac{d}{dy}\left(e^{-G ? \frac{?_0 - y}{m}}\right),$$

$$\boxed{f_Y(y) = u_0(y) \; ? e^{-G ? \frac{?_0}{m}} + \frac{G}{m} \; ? e^{-G ? \frac{?_0 - y}{m}}} \qquad (0 ? y ? ?_0)$$

Hierin ist $u_0(y)$ die Impuls- oder Dirac-Funktion, definiert durch

$$\boxed{u_0(t) = \begin{cases} ? & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \int_{-?}^{+?} u_0(t)\, dt = 1 \; .}$$

Einige Eigenschaften der Dirac-Funktiom: Sei $g(x)$ eine differenzierbare Funktion; dann gilt

$$\int_{-?}^{+?} u_0(t - x) \; ?g(x)\, dx = \int_{-?}^{+?} u_0(x) \; ?g(t - x)\, dx = g(t) \; ,$$

und die Kroneckerfunktion $??(x)$ ist durch die Impulsfunktion definiert als

$$\int_{-?}^{t} u_0(x)\, dx = ?(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t ? 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \; .$$

Setzt man $g(x) = -x$, so folgt

$$\int_{-?}^{+?} u_0(x) \; ?g(t - x)\, dx = \int_{-?}^{+?} u_0(x) \; ?(x - t)\, dx = -t \; ,$$

also insbesondere $$\int_{-?}^{+?} u_0(x) \; ?x\, dx = 0 .$$

Um in $E[S] = \frac{E[U]}{E[C]} = \frac{E[U]}{E[B] + E[I]}$ den Erwartungswert $E[C] = E[B] + E[I]$ aus-zurechnen, wird $\boxed{E[B] = E[Y] + m + ?_0}$ wie folgt bestimmt:

$$E[Y] = \int_{-?}^{+?} y \; f_Y(y) \; dy = e^{-G\frac{?_0}{m}} ? \int_{-?}^{+?} y \; u_0(y) \; dy + \frac{G}{m} ? \int_0^{?_0} y \; ? e^{-G\frac{?_0}{m}} \; ? e^{\frac{G}{m}y} \; dy$$

$$= e^{-G\frac{?_0}{m}} ? \frac{m}{G} ? \int_0^{?_0} \frac{G}{m} ? y \; ? e^{\frac{G}{m}y} \; d\left(\frac{G}{m} y\right) = e^{-G\frac{?_0}{m}} ? \frac{m}{G} ? \int_0^{\frac{G}{m}?_0} ? \; ? e^{?} \; d?$$

$$= e^{-G\frac{?_0}{m}} ? \frac{m}{G} ? \left(e^{G\frac{?_0}{m}} ? \left[\frac{G}{m} \; ?_0 - 1\right] + 1\right) = ?_0 - \frac{m}{G} \; ?\left(1 - e^{-G\frac{?_0}{m}}\right)$$

$$? \quad \boxed{E[B] = m + 2?_0 - \frac{m}{G} \; ?\left(1 - e^{-G\frac{?_0}{m}}\right)}$$

Da der Ankunftsprozeß als Poisson-Prozeß angenommen wurde, die Zwischenankunftszeiten also als exponentialverteilt mit dem Parameter $?$, erhält man für den Erwartungswert E $[I\,]$ der Zeit bis zu einer nächsten Ankunft (Erwartungswert der Leerzeit) den Wert $1/?$:

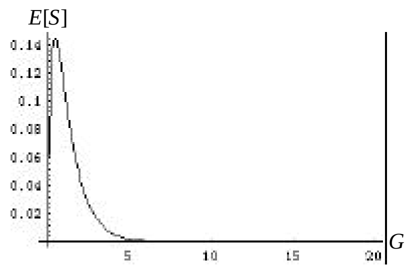
$$E[I] = \frac{1}{?} = \frac{m}{G}$$

$$? \quad \boxed{E[S] = \frac{m \; ? e^{-G\frac{?_0}{m}}}{m + 2?_0 + \frac{m}{G} \; ? e^{-G\frac{?_0}{m}}} = \frac{G \; ? e^{-G\,a}}{G + 2aG + e^{-G\,a}}}$$

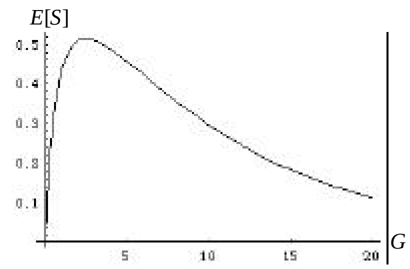
Der maximal erreichbare mittlere normalisierte Durchsatz ist offenbar $E[S] = 1$, und wird erreicht für $a = 0$ bei unendlich hoher Last $G_8 = 8$:

$$E[S]_{a=0} = \frac{G}{G+1}\,, \qquad E[S]_{\substack{a=0,\\ G ? ?}} = \lim_{G ? ?} \frac{G}{G+1} = 1\,.$$

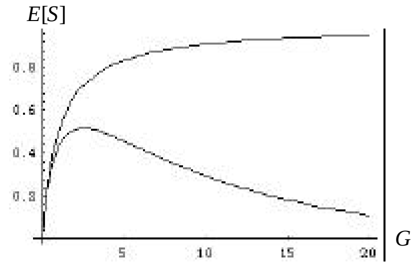
$E[S]$ für verschiedene Werte von $a = ?_0 / m$



$a = 1.0$



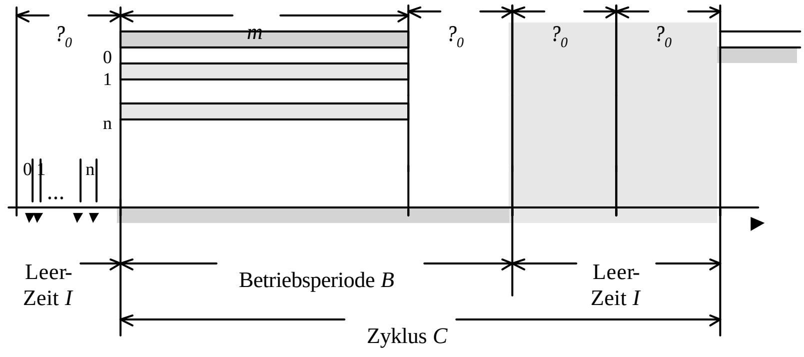
$a = 0.1$



$a = 0.0$ (obere Kurve) und $a = 0.01$ (untere Kurve)

Analyse für " slotted non-persistent CSMA"

Taktlänge ist die (maximale) Signalübertragungsdauer $?_0$
Referenz-Paketübertragung beginnt zu einem Taktzeitpunkt



Jede Betriebsperiode, ob mit erfolgreicher oder erfolgloser Übertragung, dauert $m + ?_0$ Zeiteinheiten. Da jedes Bit, das einem Slot übertragen wird, den Slot als belegt fixiert, ist m als Vielfaches von $?_0$ anzunehmen. ?'

$$B' = m + ?_0$$

Auch die Leerperiode I dauert eine ganze Zahl von Slots, uns man hat

$$\mathbf{P}\{I = 0\} = \mathbf{P}\{\text{mindestens eine Ankunft im Slot nach Ü. – Ende}\}$$
$$= 1 - e^{-G\frac{?_0}{m}} = 1 - e^{-G\,a} =: ?$$

$$\mathbf{P}\{I = k \text{ Slots}\} = (1 - ?)^k\, ??$$ (keine Ankunft während k Slots, 1 Ankunft im darauf folgenden)

$$?: \qquad E[I] = \sum_{k=0}^{?} k\, ?(1 - ?)^k\, ??\ ??_0 = \frac{1 - ?}{?}\, ??_0$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes von ? erhält man also
$$\boxed{E[I] = \frac{e^{-G\frac{?_0}{m}}}{1 - e^{-G\frac{?_0}{m}}}\, ??_0}$$

Die mittlere Zykluslänge C hat damit den Wert $E[C] = m + ?_0 + \frac{e^{-G\frac{?_0}{m}}}{1 - e^{-G\frac{?_0}{m}}}\, ??_0$, und der mittlere normierte Durchsatz $E[S]$ ist aus $E[S] = \frac{p_s ? m}{E[C]}$ zu berechnen.

Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit p_s:

p_s ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Slot mit Ankünften nur genau eine Ankunft auftritt; die Menge aller möglichen Fälle ist somit diejenige aller Slot-Besetzungen nach einer Betriebsperiode unter der Bedingung, daß mindestens eine Ankunft in einem Slot auftritt:

$p_s = \mathbf{P}\{\text{genau eine Ankunft in einer Taktperiode | mindestens eine Ankunft darin}\}$

$$p_s = \frac{\mathbf{P}\{\text{genau eine Ankunft } \textit{und} \text{ mindestens eine Ankunft in } ?_0\}}{\mathbf{P}\{\text{mindestens eine Ankunft in } ?_0\}}$$

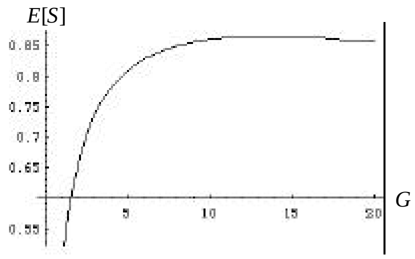
$$= \frac{\mathbf{P}\{\text{genau eine Ankunft in } ?_0\}}{\mathbf{P}\{\text{mindestens eine Ankunft in } ?_0\}} = \frac{?\ ?_0\, e^{-?\ ?_0}}{1 - e^{-?\ ?_0}} = \frac{G\ ?a\ ?e^{-G\,a}}{1 - e^{-G\,a}}$$

$$?: \quad \boxed{E[S] = \frac{m ? G\,a\, e^{-G\,a}}{\left(1 - e^{-G\,a}\right) ? \left(m + ?_0 + \frac{e^{-G\frac{?_0}{m}}}{1 - e^{-G\frac{?_0}{m}}}\, ??_0\right)} = \frac{G\,a ? e^{-G\,a}}{1 - e^{-G\,a} + a}}$$

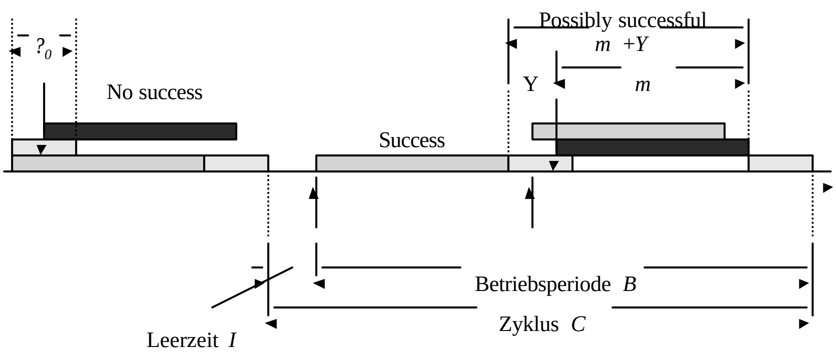
Offenbar erhält man auch hier für verschwindendes ? den Ausdruck $E[S]_{a=0} = \frac{G}{1+G}$

(Anwendung der L'Hopital'schen Regel), und der maximal erreichbare mittlere normierte Durchsatz wird wieder $E[S]_{\substack{a=0,\\ G?\,?}} = \lim_{G?\,?} \frac{G}{G+1} = 1$.

Verlauf für $a = 0{,}01$:



Analyse für " unslotted 1-persistent CSMA"



Notation:

K = Kanalkapazität [bps]
$m = L / K$ = Paketübertragungszeit [sec]
$??_0$ = konstante Signallaufzeit zwischen je zwei Stationen
$G = ?{\cdot}m$ mittlere Gesamtanzahl von Paketankünften pro Paketübertragungszeit
S = mittlere Anzahl erfolgreicher Übertragungen pro Paketübertragungszeit, sog normalisierter Durchsatz
$a = ??_0 / m$ normalisierte Signallaufzeit

$S = p_S \cdot G$, p_S die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Übertragungsversuch.

Zu unterscheidende Fälle:

a) Ankunft und Ü - Beginn in einer Leerperiode ? $p_S = e^{-??_0} = e^{-aG}$

b) Ankunft und Ü - Beginn in einem $?_?$ - Intervall nach Start einer anderen Übertragung
? $p_S = 0$ (mit Sicherheit kein Übertragungserfolg!)

c) Ankunft während einer Phase mit Kollisionen nach Ende einer Übertragung (Ende des $?_?$ - Intervalles), wobei das letzte kollidierende Paket zum Zeitpunkt Y im ersten $?_?$ - Abschnitt der laufenden ersten Übertragung gestartet wird.

? $p_S =$ ***P*** {die Referenzankunft ist die einzige Ankunft in $Y + m$
und keine andere Ankunft erfolgt während der kritischen
Anfangsphase der Länge $?_?$ der eigenen Übertragung }

$= \hat{q} \cdot e^{-??_0}$, worin $\hat{q}$ die Wahrscheinlichkeit keiner weiteren
Ankunft in einem **beobachteten** Intervall $Y + m$ ist.

Es beschreibe B' denjenigen Anteil einer Betriebsperiode B, der entsteht, wenn von jeder Übertragungsperiode $Y + m + ?_{??}$ in B der Anteil $?_{???}$ (Zeit der Nichtbenutzung des Kanals) abgezogen wird. Mit dieser Bezeichnung folgt

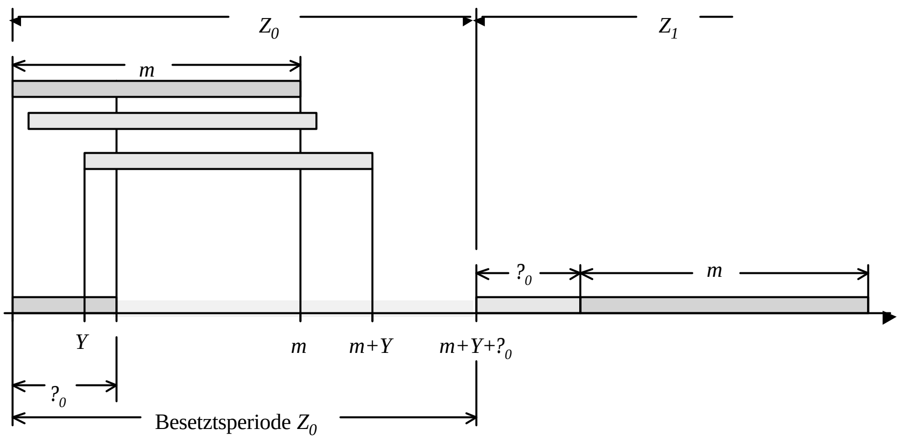
$$\boldsymbol{P}\{\text{Auftreten einer Leerperiode}\} = \frac{E[I]}{E[I] + E[B]}$$

$$\boldsymbol{P}\{\text{Auftreten einer Übertragungsperiode } Y + m\} = \frac{E[B']}{E[I] + E[B]}$$

? Erfolgswahrscheinlichkeit p_S ist gegeben durch

$$p_S = \frac{E[I]}{E[I] + E[B]} ? e^{-??_0} + \frac{E[B']}{E[I] + E[B]} ? \hat{q} ? e^{-??_0} ,$$

$$\boxed{p_S = \frac{e^{-??_0}}{E[I] + E[B]} ? \left\{ E[I] + E[B'] \, \hat{q} \right\}}$$



Y = Ankunftszeitpunkt des letzten mit dem Referenzpaket kollidierenden Paketes
$Y = 0$: Betriebsperiode mit erfolgreicher Übertragung; sonst : $0 < Y = ?_0$

Die mittlere Dauer einer Leerperiode ist $E[I] = \frac{1}{?} = \frac{m}{G}$. Zu berechnen sind demnach nur $E[B]$, $E[B']$ und $\hat{q}$.

Eine Betriebsperiode B besteht aus einer Summe von Übertragungsperioden Z_i der Form $Y+m+?_?$; die Anzahl k solcher Ü.-Perioden ist selbst eine Zufallsvariable.

$$\boxed{B = \underset{i=1}{\overset{k}{?}} \left(Z_i + ?_0\right) = \underset{i=1}{\overset{k}{?}} \left(Y_i + m + ?_0\right), \qquad B' = \underset{i=1}{\overset{k}{?}} Z_i = \underset{i=1}{\overset{k}{?}} \left(Y_i + m\right).}$$

Für eine Folge $\left\{X_n\right\}_{n \,?\, /N_0}$ unabhängiger Zufallsvariablen heißt k eine **Stoppzeit**, falls das Eintreffen des Ereignisses $\{k = j\}$ nur von den eingetretenen X_n "bis $n = j$ ", d.h. nur von der Familie $\left\{X_n \;:\; n \,?\, j\right\}$ abhängt.

Hier ist k offensichtlich eine Stoppzeit der Variablenfamilie $\left\{Y_n + m + ?_0 \;:\; n \,?\, /N_0\right\}$

Satz von Wald: Für eine Folge $\{X_n\}_{n ? /N_0}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit den Eigenschaften $E[X_n] = E[X] \ ? \ n$, $E[|X_n|] < M < ? \ ? \ n$ sei k eine Stoppzeit; dann gilt $E\left[\sum_{n=1}^{k} X_n\right] = E[X] \, ? E[k]$.

$? \quad E[B] = E[k] \, ?(?_0 + m + E[Y])$, $\quad E[B'] = E[k] \, ?(m + E[Y])$.

k ist geometrisch verteilt: Eine neue Ü.-Periode schließt sich genau dann an eine vorhergehende an, wenn während der letzten $Y + m$ Zeiteinheiten mindestens eine Ankunft auftrat; ist dies nicht der Fall, so folgt eine Leerperiode, d.h. die Betriebsperiode ist beendet.

Sei nun

$$q_0 = \boldsymbol{P}\left\{\text{in den letzten } Y + m \text{ Zeiteinheiten einer Ü.} - \text{Periode erfolgte keine Ankunft}\right\}$$

$$? \quad \boldsymbol{P}\{B \text{ dauert } ? \text{ Ü.} - \text{Perioden}\} = \boldsymbol{P}\{k = ?\} = (1 - q_0)^{? - 1} \, ? q_0 \qquad \text{für k = 1 ,}$$

$$\boxed{E[k] = \sum_{? = 1}^{?} ?(1 - q_0)^{? - 1} q_0 = \frac{1}{q_0} \, .}$$

$$? \quad E[B] = \frac{1}{q_0} \, ?(?_0 + m + E[Y]), \quad E[B'] = \frac{1}{q_0} \, ?(m + E[Y])$$

Nunmehr sind nur noch q_0 und $E[Y]$ zu bestimmen. Es sei q_j die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer (Y+m) - Periode j Paketübertragungen versucht werden, und q_j(y) bezeichne die entsprechende Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß $Y = y$ ist.

$$? \quad q_j = \int_0^{?_0} q_j(y) \, ? f_Y(y) \, dy$$

(es war $f_Y(y) = u_0(y) \, ? e^{-G \, ? \frac{?_0}{m}} + \frac{G}{m} \, ? e^{-G \, ? \frac{?_0 - y}{m}}$, vergl. Analyse zum ungetakteten non-persistent CSMA). Mit

$$q_r^{(1)} = \boldsymbol{P}\{r \text{ Ü} - \text{Versuche in } m \text{ Zeiteinheiten}\},$$

$$q_r^{(2)}(y) = \boldsymbol{P}\{r \text{ Ü} - \text{Versuche in } y \text{ Zeiteinheiten}\}$$

$$? \quad q_j(y) = \sum_{r=1}^{j} q_{j-r}^{(1)} \, ? q_r^{(2)}(y) = \sum_{r=1}^{j} q_{j-r}^{(1)} \, ? \int_0^{?_0} q_r^{(2)}(y) \, f_y(y) dy$$

Für die z-Transformierten folgt $Q(z) = \sum_{j=0}^{?} q_j z^j$ und

$$Q_1(z) = \sum_{j=0}^{?} q_j^{(1)} z^j, \quad Q_2(z) = \sum_{j=0}^{?} \left(\int_0^{?_0} q_j^{(2)}(y) f_y(y) dy \right) ? z^j \quad \text{mit} \quad Q(z) = Q_1(z) \, ? Q_2(z)$$

Um nun q_0 zu erhalten, ist lediglich $Q(0)$ zu berechnen: $q_0 = Q_1(0) \, ? Q_2(0)$.

$$q_i^{(1)} = \frac{(? \, m)^i}{i!} e^{-? m} \quad ? \quad \boxed{Q_1(z) = \sum_{i=0}^{?} \frac{(? \, m)^i}{i!} e^{-? m} z^i = e^{-? m(1-z)}, \; ? \; Q_1(0) = e^{-? m}}$$

$$q_i^{(2)}(y) = \frac{(? \, y)^i}{i!} e^{-? y} \quad ? \quad Q_2(z) = \sum_{i=0}^{?} \int_0^{?_0} \frac{(? \, y)^i}{i!} e^{-? y} f_y(y) \, dy \, z^i$$

$$= \int_0^{?_0} e^{-? y(1-z)} f_y(y) \, dy = \int_{-?}^{+?} e^{-? y(1-z)} f_y(y) \, dy$$

$$= F_Y^*(? [1-z])$$

$$\boxed{F_Y^*(s) = \int_{-?}^{+?} e^{-s y} f_Y(y) \, dy = \int_0^{?_0} e^{-s y} \left(u_0(y) e^{-? ?_0} + ? \, e^{-?(?_0 - y)} \right) dy = e^{-? ?_0} + \frac{? \left(e^{-s ?_0} - e^{-? ?_0} \right)}{? - s}} \; .$$

$$F_Y^*(?) = e^{-? ?_0} + \lim_{s ? ?} \frac{? \left(e^{-s ?_0} - e^{-? ?_0} \right)}{? - s} = e^{-? ?_0} ? (1 + ? \, ?_0) = Q_2(0)$$

$$? \quad \boxed{q_0 = Q_1(0) \, ? Q_2(0) = e^{-?(?_0 + m)} \, ? (1 + ? \, ?_0)}$$

Es war $E[Y]$ bereits für den Fall des ungetakteten non-persistent CSMA berechnet worden:

$$E[Y] = \frac{1}{?} \left(? \, ?_0 - 1 + e^{-? ?_0} \right) = \frac{m}{G} \left(a \, G + e^{-a G} - 1 \right)$$

$(? = \frac{G}{m}, \quad a = \frac{?_0}{m})$. Damit erhält man schließlich

$$\boxed{E[B] = \frac{m}{G} \, ? \frac{G(1+a) + a \, G - 1 + e^{-a G}}{(1 + a \, G) \, ? e^{-G(1+a)}}, \qquad E[B'] = \frac{m}{G} \, ? \frac{G(1+a) - 1 + e^{-a G}}{(1 + a \, G) \, ? e^{-G(1+a)}}}.$$

Die Erfolgswahrscheinlichkeit p_S für einen Übertragungsversuch war gegeben durch die Beziehung

$$\overset{?}{p}_S = \frac{e^{-?\,?_0}}{E[B]+E[I]}\,?\left(E[I]+E[B']\,?\hat{q}\right)$$

$\hat{q}$ ist darin die Wahrscheinlichkeit für das Ausbleiben weoterer Ankünfte in einem **beobachteten** Intervall $\hat{Z}' = m + \hat{Y}$.

Für $Z' = m + Y$ sei $f_Z(z)$ die Dichtefunktion. Die Dichte der Variablen $\hat{Z}'$ ist dann gegeben als

$$\boxed{f_{\hat{Z}'}(z) = \frac{z\,?\,f_{Z'}(z)}{E[Z']}.}$$

$$f_{Z'}^{?}(z) = f_Y(z-m) = u_0(z-m)\,e^{-?\,?_0} + ?\,e^{-?\,?_0+?(z-m)},$$

$$E[Z'] = m + E[Y] = m + \frac{m}{G}\left(a\,G - 1 + e^{-a\,G}\right).$$

Setzt man $\hat{q}(z) = P\left\{\text{keine Ankunft in } \hat{Z}' \mid \hat{Z}' = z\right\} = e^{-?\,z}$, so folgt

$$\hat{q}(z) = \int_m^{m+?_0} e^{-?\,t}\,f_{\hat{Z}}(t)\,dt = \frac{1}{E[Z']}\int_m^{m+?_0} e^{-?\,t}\,t\,f_Y(t-m)\,dt$$

$$F_{Z'}^{*}(s) = \int_{-?}^{+?} e^{-sx}\,f_{Z'}(x)\,dx = \int_m^{m+?_0} e^{-sx}\,f_{Z'}(x)\,dx.$$

Aus der Theorie der LST ist bekannt, daß die Transformierte von $t\,?\,f_{Z'}(t)$ in folgender Form gegeben ist:

$$\int_{-?}^{+?} e^{-sx}\,x\,f_Z(x)\,dx = \int_m^{m+?_0} e^{-sx}\,x\,f_{Z'}(x)\,dx = -\frac{d}{ds}F_{Z'}^{*}(s).$$

$$?\quad \hat{q} = -\frac{1}{E[Z']}\,?\,\frac{d}{ds}F_{Z'}^{*}(s)\Big|_{s=?}.$$

Beachtet man $F_{Z'}^{*}(s) = e^{-sm}\,?F_Y^{*}(s)$, so ergibt sich nach längerer Rechnung:

$$\frac{d}{ds}F_{Z'}^{*}(s)\Big|_{s=?} = -e^{-?(?_0+m)}\left(m+\frac{?}{2}\left[?_0^2+2\,?_0\,m\right]\right)$$

$$?\quad \hat{q} = -\frac{1}{E[Z']}\,?\,\frac{d}{ds}F_{Z'}^{*}(s)\Big|_{s=?} = \frac{\left(G+a\,G^2\left[1+\frac{a}{2}\right]\right)e^{-G(1+a)}}{G(1+a)-\left(1-e^{-a\,G}\right)}$$

$$? \quad p_S = \frac{\left(1 + aG\right) e^{-G(1+a)} + \left\{\left(G\left[1+a\right]\right) - \left(1 - e^{-aG}\right)\right\} ?\hat{q}}{\left(1 + aG\right) e^{-G(1+a)} + G\left(1+2a\right) - \left(1 - e^{-aG}\right)} ?e^{-aG}$$

$$= \frac{\left(1 + G + aG + aG^2\left[1 + \frac{a}{2}\right]\right) e^{-G(1+2a)}}{\left(1 + aG\right) e^{-G(1+a)} + G\left(1+2a\right) - \left(1 - e^{-aG}\right)} \quad , \quad ?$$

$$\boxed{S = = \frac{G ?\left(1 + G + aG + aG^2\left[1 + \frac{a}{2}\right]\right) e^{-G(1+2a)}}{\left(1 + aG\right) e^{-G(1+a)} + G\left(1+2a\right) - \left(1 - e^{-aG}\right)}}$$

Verfahren	Funktionale Abhängigkeit $E[S] = E[S]$ (a, G)	Optimaler mittlerer Durchsatz
Pure ALOHA	$E[S] = G ?e^{-2G}$	0.184
Slotted ALOHA	$E[S] = G ?e^{-G}$	0.368
Unslotted non-persistent CSMA	$E[S] = \frac{G \cdot e^{-Ga}}{G + 2aG + e^{-Ga}}$	0.815
Slotted non-persistent CSMA	$E[S] = \frac{G a \cdot e^{-Ga}}{1 - e^{-Ga} + a}$	0.857
Unslotted 1-persistent CSMA	$E[S] = \frac{G ?\left(1 + G + aG ?\left[1 + G + a ?G/2\right]\right) ?e^{-G(1+2a)}}{G\left(1+2a\right) - \left(1 - e^{-aG}\right) + \left(1 + aG\right) ?e^{-G(1+a)}}$	0.529

Tabelle für $a = 0.01$.

Einige weiter Resultate:

Verfahren	Funktionale Abhängigkeit $E[S] = E[S]$ (a, G)	Optimaler mittlerer Durchsatz
0.1 - persistent CSMA	Keine Angabe	0.791
0.03 - persistent CSMA	Keine Angabe	0.827
Slotted 1-persistent CSMA	$E[S] = \frac{G \cdot e^{-G(1+a)} \cdot (1 + a - e^{-aG})}{(1+a) \cdot (1 - e^{-aG}) + a \cdot e^{-G(1+a)}}$	0.531
Perfect Schedu-Ling (M/D/1 - Queue)	Siehe Vorlesung (später)	1.000

Tabelle für $a = 0.01$.