Näherungsalgorithmen

(Approximationsalgorithmen)

WiSe 2008/09 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Näherungsalgorithmen}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

Approximationstheorie

- Absolute Approximation
- Relative Approximation: die Klasse APX
- Polynomzeit-Approximationsschemata PTAS
- Zwischen APX und NPO
- Zwischen PTAS und APX
- Approximationsklassen und Reduktionen

Bekannte Begriffe

— Turing-Reduktion (sehr allgemein)
— Karp-Reduktion (abgeschwächter Begriff)
Ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P}_1$ heißt *Karp-reduzierbar* (oder *many-one-reduzierbar*) auf ein Entscheidungsproblem $\mathcal{P}_2$, wenn es einem (Polynomzeit-)Algorithmus R gibt, der eine Instanz x von $\mathcal{P}_1$ in eine Instanz y von $\mathcal{P}_2$ überführt in einer Weise, dass x eine Ja-Instanz von $\mathcal{P}_1$ ist und y eine Ja-Instanz von $\mathcal{P}_2$ ist.

Erinnerung: NP-Theorie

Zentrales Anliegen: Probleme zu kennen, die hart für NP sind in dem Sinne, dass ein deterministischer Polynomzeitalgorithmus für *ein* solches Problem die Existenz deterministischer Polynomzeitalgorithmen für *alle* NP-vollständigen Probleme nach sich ziehen würde.

Wir wollen etwas Entsprechendes auch im Falle der Optimierungsprobleme entwickeln, müssen uns aber erst einmal an die wichtigsten Dinge aus der NP-Vollständigkeitstheorie erinnern, da die Verhältnisse dort einfacher sind.

Das „generische“ NP-vollständige Problem ist:

Ggb: nichtdeterministische Turing-Maschine, Eingabe x von TM, Polynom p

Frage: Akzeptiert TM das Wort x in höchstens $p(|x|)$ Schritten?

Dieses Problem liegt in NP, und würde es in P liegen, so wäre P=NP.

Das vielleicht wichtigste NP-vollständige Problem ist das **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**:

Ggb: KNF Formel $\mathcal{F}$ auf einer Menge V von Booleschen Variablen.

Frage: Ist $\mathcal{F}$ erfüllbar? D.h., gibt es eine Variablenbelegung $f : V \to \{\text{true}, \text{false}\}$, die $\mathcal{F}$ „wahr macht"?

Satz: (Satz von Cook(-Levin))
Das Erfüllbarkeitsproblem ist NP-vollständig.
Zum Beweis verweisen wir auf andere Vorlesungen.
Die Beweisidee besteht in der formelmäßigen Darstellung des „Rechenteppichs" einer Turing-Maschine.
Wir wollen den Karpschen Reduktionsbegriff an zwei Beispielen üben.

Beispiel: $\{0, 1\}$-Lineares Programmieren

Ggb: Menge von Variablen $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, die Werte aus $\{0, 1\}$ annehmen können; Menge I von linearen Ungleichungen (mit Variablen aus Z und ganzzahligen Koeffizienten).

Frage: Hat I eine Lösung, d.h. irgendeine Variablenbelegung, die alle Ungleichungen erfüllt?

Lemma: $\{0, 1\}$-lineares Programmieren is NP-hart.

Beweis: Betrachte eine Instanz $x = (V, \mathcal{F})$ von SAT mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es sei $l_{j_1} \vee \ldots \vee l_{j_{n_j}}$ die j-te Klausel in $\mathcal{F}$. Als entsprechende Ungleichung sehen wir $\rho_{j_1} + \ldots + \rho_{j_{n_j}} \geq 1$ an mit $\rho_{j_x} = z_i$, falls $l_{j_k} = x_i$, und $\rho_{j_k} = (1 - z_i)$, falls $l_{j_k} = \overline{x_i}$. Dadurch ergibt sich eine $\{0, 1\}$-LP-Instanz $y = (Z, I)$. Ist $f : V \to \{\text{true}, \text{false}\}$ eine Wahrheitsbelegung, so ist $f(\mathcal{F}) = \text{true}$ gdw. f' erfüllt alle Ungleichungen in I, wobei $f'(z_i) = 1$ gdw. $f(x_i) = \text{true}$. $\square$

Beispiel: 3SAT Def. wie SAT, nur dass jede Klausel (höchstens) drei Literale enthält.

Lemma: 3SAT ist NP-hart.

Beweis: Wir zeigen, wie allgemeine SAT-Formeln in (hinsichtlich der Erfüllbarkeit) äquivalente 3SAT-Formeln überführt werden können. Ist $l_{j,1} \vee \ldots \vee l_{j,n_j}$ eine Klausel mit $n_j > 3$, so kann durch Einführen von $n_j - 3$ Variablen $y_{j,1}, \ldots y_{j,n-3}$ und insgesamt $n_j - 2$ Klauseln die 3SAT-Restriktion erfüllt werden. Die Klauseln sehen dafür wie folgt aus:

$$(l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee y_{j,1}), (\overline{y_{j,1}} \vee l_{j,3} \vee y_{j,2}), \ldots, (\overline{y_{j,n_j-4}} \vee l_{j,n_j-2} \vee y_{j,n_j-3}), (\overline{y_{j,n_j-3}} \vee l_{j,n_j-1} \vee l_{j,n_j})$$

□

Die Welt von NPO-Problemen

Betrachten wir zunächst die folgende, den Begriff eines r-approximativen Algorithmus nur verallgemeinernde Definition:

Ist $\mathcal{P}$ ein NPO-Problem, $\mathcal{A}$ ein Approximationsalgorithmus für $\mathcal{P}$ und $r : \mathbb{N} \to (1, \infty)$ eine Abbildung, so heißt $\mathcal{A}$ $r(n)$-*Approximation*, falls für jede Instanz $x \in I_{\mathcal{P}}$ mit $S_{\mathcal{P}}(x) \neq \emptyset$ die Leistungsgüte der zulässigen Lösung $\mathcal{A}(x)$ der Ungleichung $R(x, \mathcal{A}) \leq r(|x|)$ genügt.

Das Verhalten des Algorithmus $\mathcal{A}$ ist bei Eingaben, die keine zulässige Lösungen haben, unbestimmt. Natürlich wird keine Lösung zurückgeliefert.

Ist $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen $f : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ so bezeichnet $\mathcal{F}$-APX die Klasse der Probleme, für die ein $r(n)$-approximativer Polynomzeitalgorithmus (für ein $r \in \mathcal{F}$) existiert. Spezielle Funktionsklassen sind:

- LOG:$= O(\log(n))$
- POLY:$= \bigcup_{k>0} O(n^k)$
- EXP:$= \bigcup_{k>0} O(2^{n^k})$

Satz:

$$\text{PTAS} \subseteq \text{APX} \subseteq \text{LOG} - \text{APX} \subseteq \text{POLY} - \text{APX} \subseteq \text{EXP} - \text{APX} \subseteq \text{NPO}.$$

Gilt vielleicht $\mathrm{EXP} - \mathrm{APX} = \mathrm{NPO}$?

Ein verführerisches Argument ist das Folgende:

Wegen der polynomiellen Schranke auf der Rechenzeit für die Maßfunktion $m_{\mathcal{P}}$ ist doch jedes NPO-Problem $\mathcal{P}$ $h \cdot 2^{n^k}$-approximierbar für geeignete h und k.

ABER: Es gibt eben Probleme, für die bereits die Frage, ob eine zulässige Lösung existiert, NP-hart ist. Dazu gibt es im Folgenden Beispiele.

Satz: Wenn $P \neq NP$, so $EXP - APX \neq NPO$.

Beweis: Betrachten wir das folgende NPO-Problem:

Minimum $\{0, 1\}$**-LP**

$I =$ $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, w \in \mathbb{N}^n$
$S :$ $x \in \{0, 1\}^n$ mit $Ax \geq b$
$m :$ $\sum w_i x_i$ (Skalarprodukt von w und x)
opt : $\min$.

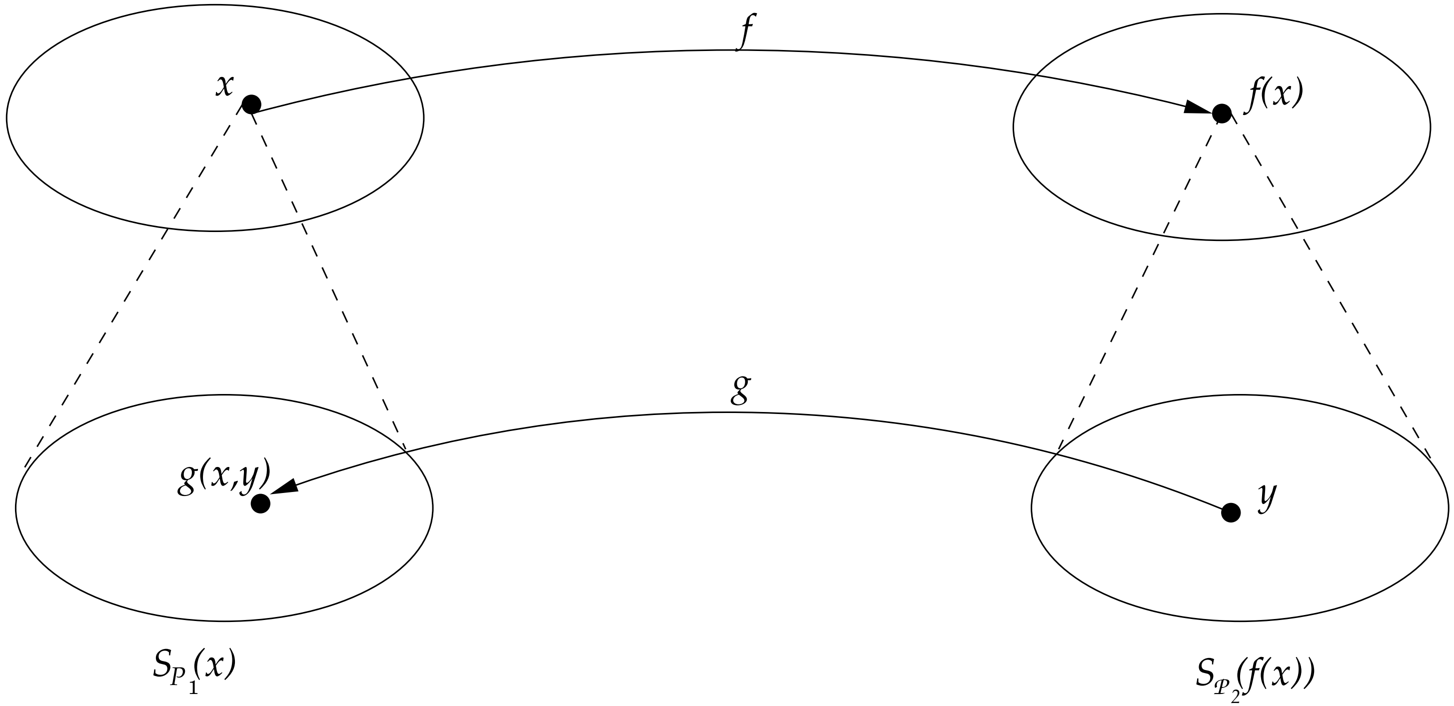
Wäre Minimum $\{0, 1\} - \text{LP} \in \text{EXP} - \text{APX}$, so könnten wir an dem Verhalten einer Polynomzeit-Approximation für eine Instanz x ablesen, ob dieselbe Instanz x, aufgefasst als $\{0, 1\}$-LP-Instanz, eine JA-Instanz ist oder nicht. Das Problem, überhaupt eine zulässige Lösung zu finden, haben wir im ersten Lemma betrachtet. $\square$

AP-Reduzierbarkeit

Bei Entscheidungsproblemen genügte es, einen Reduktionsbegriff von $\mathcal{P}_1$ auf $\mathcal{P}_2$ so zu definieren, dass man $\mathcal{P}_1$ „mit Hilfe von“ $\mathcal{P}_2$ lösen kann, was beim Karpschen Reduktionsbegriff bedeutet, dass Instanzen von $\mathcal{P}_1$ in Instanzen von $\mathcal{P}_2$ (in Polynomzeit) umgerechnet werden können. Dies genügt für einen Approximationsreduktionsbegriff nicht; vielmehr benötigen wir einen weiteren Algorithmus, der Lösungen von $\mathcal{P}_2$ in solche für $\mathcal{P}_1$ zurück rechnet, und letztere Rechnung sollte natürlich (in einem noch zu detaillierenden Sinne) die Näherungsgüte bewahren.

Schematisch können wir uns eine solche Approximationsreduktion wie folgt vorstellen.

Schema einer AP-Reduktion



Approximationsgüteerhaltung am Bsp.: Knotenüberdeckung $\rightsquigarrow$ MaxClique

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so ist der *Komplementgraph* $G^c = (V, E^c)$ definiert durch $E^c = \{\{v_1, v_2\} \subseteq V \mid v_1 \neq v_2, \{v_1, v_2\} \notin E\}$.

Lemma: $V' \subseteq V$ ist Knotenüberdeckung in G gdw, $V \setminus V'$ ist Clique in G^c.

<u>Beweis:</u> Angenommen $V' \subseteq V$ ist Knotenüberdeckung. Gäbe es eine „Kante“ $\{u, v\} \notin E^c, u, v \in V \setminus V'$, so wäre $\{u, v\} \in E$ und $\{u, v\} \cap V' = \emptyset$, also V' keine Überdeckung.

Ist $V \setminus V'$ Clique, so betrachte hypothetisch eine von V' unüberdeckte Kante $\{u, v\}$, also $\{u, v\} \cap V' = \emptyset$. $\rightsquigarrow \{u, v\} \subseteq V \setminus V'$, d. h. $\{u, v\} \in E^c$. Kanten aus E sind also durch V' abgedeckt. $\square$

Das Lemma zeigt, dass das Knotenüberdeckungsproblem (Frage nach der Existenz einer Knotenüberdeckung mit höchstens k Knoten) auf das Cliquenproblem (Frage nach der Existenz einer Clique der Größe mindestens $|V| - k$) reduzieren lässt und umgekehrt (im Karpschen Sinne).
In obiger Notation haben wir (für beide Reduktionsrichtungen!):

$f(G) = G^c$ und, für $V' \subseteq V, g(G, V') = V \setminus V'$

Diese Approximationsreduktion erhält aber *nicht* die Approximationsgüte:
Betrachte die Graphenschar $(G_n)_{n \geq 1}$, wobei G_n aus zwei Cliquen mit jeweils n Knoten besteht, wobei der i-te Knoten der ersten Clique mit allen Knoten der zweiten Clique —mit Ausnahme des i-ten Knoten der zweiten Clique— verbunden ist. Jede maximale Clique von G_n enthält n Knoten.
Der Komplementgraph G_n^c besteht aus n disjunkten Paaren miteinander verbundener Knoten. Daher hat die triviale Lösung des MVC-Problems (man nehme alle Knoten als Knotenüberdeckung) eine Leistungsgüte von 2. Geht man zurück zum Ursprungsproblem, dem Cliquenproblem, so wäre die der MVC-Leistung „entsprechende“ Cliquenlösung die leere Menge.
Damit ist klar, dass die Näherungsgüte nicht erhalten bleibt bei dieser Reduktion.

Approximationserhaltene Reduktionen

Betrachte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in$ NPO, $\mathcal{P}_1$ heißt *näherungserhaltend* auf $\mathcal{P}_2$ *reduzierbar*, kurz $\mathcal{P}_1$ ist *AP-reduzierbar* (AP bedeutet ausgeschrieben „approximation preserving") auf $\mathcal{P}_2$, in Zeichen $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$, wenn es zwei Abbildungen f, g gibt und eine Konstante $\alpha \geq 1$ derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) : f(x, r) \in I_{\mathcal{P}_2}$.

2. $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) : S_{\mathcal{P}_1}(x) \neq \emptyset \to S_{\mathcal{P}_2}(x)(f(x, r)) \neq \emptyset$.

3. $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) \forall y \in S_{\mathcal{P}_2}(f(x, r)) : g(x, y, r) \in S_{\mathcal{P}_1}(x)$.

4. f, g sind durch Algorithmen $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{A}_g$ berechenbar, deren Laufzeit polynomiell ist für jedes feste $r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty)$.

5. $\forall x \in I_{\mathcal{P}_1} \forall r \in \mathbb{Q} \cap (1, \infty) \forall y \in S_{\mathcal{P}_2}(f(x, r)) :$
$$R_{\mathcal{P}_2}(f(x, r), y) \leq r \to R_{\mathcal{P}_1}(x, g(x, y, r)) \leq 1 + \alpha(r - 1)$$

Ein einfaches **Beispiel** für eine AP-Reduktion liefern MAXCLIQUE und MAX-IS durch Übergang auf den Komplementgraphen; die Clique wird so zur unabhängigen Menge.

Satz: Betrachte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \in$ NPO.

1. Gilt $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_2 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_3$, so auch $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_3$ (Transitivität)

2. Gilt $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_2 \in$ APX, so folgt $\mathcal{P}_1 \in$ APX.

3. Gilt $\mathcal{P}_1 \leq_{\text{AP}} \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_2 \in$ PTAS, so folgt $\mathcal{P}_1 \in$ PTAS.

Beweis:

1. Ist intuitiv klar, wenn auch formal mühsam hinzuschreiben.

2. Sei (f, g, α) eine AP-Reduktion von $\mathcal{P}_1$ auf $\mathcal{P}_2$. Liegt $\mathcal{P}_2$ in APX und ist $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_2}$ ein Algorithmus für $\mathcal{P}_2$ mit Leistungsgüte höchstens r, so ist

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_1}(x) := g(x, \mathcal{A}_{\mathcal{P}_2}(f(x, r)), r)$$

ein Polynomzeitalgorithmus der Leistungsgüte höchstens $1 + \alpha(r - 1)$.

3. Entsprechend überlegt man für Approximationsschemata, dass

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_1}(x, r) = g(x, \mathcal{A}_{\mathcal{P}_2}(f(x, r'), r'), r')$$

mit $r' = 1 + (r - 1)/\alpha$ ein Approximationsschema für $\mathcal{P}_1$ ist, sobald $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_2}$ eines für $\mathcal{P}_2$ ist. $\square$

Wegen dem Satz ist die folgende Definition sinnvoll: Es sei $\mathbb{C} \subseteq$NPO.
Ein Problem $\mathcal{P}[\in \text{NPO}]$ heißt $\mathbb{C}$-*hart*, wenn für jedes $\mathcal{P}' \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathcal{P}' \leq_{\mathsf{AP}} \mathcal{P}.$$

Ein $\mathbb{C}$-hartes Problem heißt $\mathbb{C}$-*vollständig*, wenn es in $\mathbb{C}$ liegt.

In der Literatur werden verschiedene Reduktionsbegriffe für Approximationsprobleme betrachtet. Entsprechend gibt es auch verschiedene Härte- und Vollständigkeitsbegriffe. Näheres dazu im Buch von Ausiello et al., Kapitel 8. Im Folgenden werden wir noch einige konkrete AP-Vollständigkeitsbegriffe diskutieren. Dadurch wird auch der Umgang mit AP-Reduktionen geübt.

NPO-Vollständigkeit

Als (nahezu generische) NPO-vollständige Probleme betrachten wir:

(a) MAXWSAT für Maximierungsprobleme aus NPO,

(b) MINWSAT für Minimierungsprobleme aus NPO.

Konkreter: MAXWSAT (Maximum Weighted Satisfiability)

I : Boolesche Formeln φ mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und nichtnegativen Gewichten $w_1, \ldots, w_n$

S : Belegung I der Variablen, sodass φ erfüllt wird.

m : $\max\left\{1, \sum_{i=1}^{n} w_i \tau(x_i)\right\}$; hierbei werden durch τ die Booleschen Werte true und false mit 1 und 0 identifiziert.

opt : $\max$

MINWSAT ist das entsprechende Minimierungsproblem (opt $= \min$).

Mitteilung:

a) MAXWSAT ist volländig für die Klasse der Maximierungsprobleme in NPO.

b) MINWSAT ist vollständig für die Klasse der Minimierungsprobleme in NPO.

Der Beweis der Mitteilung ist analog zum Beweis des Satzes von Cook-Levin: Der Rechenteppich einer geeigneten Turingmaschine wird „logisch ausgedrückt".

Aus der Mitteilung alleine folgt *nicht*, dass MAXWSAT oder MINWSAT NPO-vollständig sind. Dies ergibt sich aber unmittelbar aus dem folgenden Satz.
Satz: MAXWSAT und MINWSAT sind aufeinander AP-reduzierbar.

Satz: MAXWSAT und MINWSAT sind aufeinander AP-reduzierbar.

Beweis: (Skizze)
Wir beschreiben genauer eine Reduktion von MAXWSAT auf MINWSAT, die hinsichtlich Bedingung 5 *keine* AP-Reduktion ist, da das sich ergebende „α“ von $\mathfrak{r}$ abhängt, also nicht konstant ist. Danach deuten wir an, wie sich die Konstruktion als Spezialfall einer Schar von Reduktionen deuten lässt; mindestens eine Reduktion aus dieser Schar ist auch eine AP-Reduktion.
In ähnlicher Weise kann man eine AP-Reduktion von MINWSAT auf MAXWSAT angeben.

Konstruktion einer „falschen“ AP-Reduktion von MAXWSAT auf MINWSAT:
Aus dem (nur angedeuteten) Beweis der vorigen Mitteilung ergibt sich, dass wir o.E. nur MAXWSAT-Instanzen mit Boolescher Formel betrachten müssen, die das Folgende erfüllen:

1. φ ist definiert über Variablen $v_1, \ldots, v_s$ mit Gewichten $w(v_i) = 2^{s-i}, i = 1, \ldots, s$ sowie über einigen anderen Variablen vom Gewicht Null.

2. Jede Belegung, die φ erfüllt, weist wenigstens einer der v_i den Wert true zu.

Es sei x eine solchermaßen eingeschränkte Instanz von MAXWSAT mit Boolescher Formel φ. Definiere:

$$f(x) := \varphi \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_s \text{ mit } \alpha_i := (z_i \equiv (\overline{v_1} \wedge \ldots \wedge \overline{v_{i-1}}) \wedge v_i));$$

z_i sind dabei neue Variablen mit $w(z_i) = 2^i, 1 \leq i \leq s$. Alle anderen Variablen haben Gewicht Null in der $f(x)$-Instanz.
Ist y eine erfüllende Belegung für $f(x)$, so sei $g(x, y)$ die Einschränkung von y auf die in φ vorkommenden Variablen.

Beachte: Genau eine der z_i-Variablen ist true in jeder erfüllenden Belegun von $f(x)$. Wäre keine der z_i-Variablen true, dann wären auch alle v_i-Variablen falsch, was 2. widerspricht. Nach Konstruktion der α_i sind aber keine zwei z_i-Variablen wahr.
Also gilt für jede zulässige Lösung y von $f(x)$, dass $m(f(x), y) = 2^i$ für ein $1 \leq i \leq s$.

$$\begin{aligned} m(f(x), y) = 2^i \quad &\Leftrightarrow \quad z_i = 1 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = \ldots v_{i-1} = 0 \wedge v_i = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{s-i} \leq m(x, g(x, y)) < 2 \cdot 2^{s-i} \\ &\rightsquigarrow \quad \frac{2^s}{m(f(x), y)} \leq m(x, g(x, y)) < 2 \cdot \frac{2^s}{m(f(x), y)} \end{aligned}$$

für jede zulässige Lösung y von $f(x)$. $[*]$

Dies gilt natürlich auch für eine optimale Lösung y_f^* von $f(x)$.
Ist $\tilde{y}$ eine zulässige Lösung für x, also eine erfüllende Belegung von φ, so gibt es wegen 2) ein kleinstes i, für das v_i true ist. Durch $z_i =$ true und $z_j =$ false für $j \neq i$ lässt sich diese Belegung zu einer erfüllenden Belegung $\overline{\tilde{y}}$ von $f(x)$ erweitern. Einer optimalen Lösung $\tilde{y}^*$ von x entspricht so eine zulässige Lösung $\overline{\tilde{y}}^*$ von $f(x)$ mit der Eigenschaft $g(x, \overline{\tilde{y}}^*) = \tilde{y}^*$.

Für die Leistungsgüte von $g(x, y)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} R(x,(x,y)) &= \frac{m^*(x)}{m(x,g(x,y))} = \frac{m(x,\tilde{y}^*)}{m(x,g(x,y))} \overset{[*]}{<} \frac{2\cdot\frac{2^s}{m(f(x),\tilde{y}^*)}}{\frac{2^s}{m(f(x),y)}} \\ &\le \frac{2\cdot m(f(x),y)}{m^*(f(x))} = 2\cdot R(f(x),y). \end{aligned}$$

Setzen wir diese Abschätzung in der letzten Bedingung der AP-Reduktions-Definition ein, so sehen wir, dass $\alpha = (2r-1)/(r-1)$ keine Konstante ist. Betrachte nun folgende Schar von Reduktionen:

$$f_k(x) := \varphi \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,\dots,s \\ b_1=0,1,\dots,b_k=0,1}} \alpha_{i,b_1,\dots,b_k}$$

mit

$$\alpha_{i,b_1,\dots,b_k} = (z_{i,b_1,\dots,b_k} \equiv (\overline{v_1} \wedge \ldots \wedge \overline{v_{i-1}} \wedge v_i \wedge (v_{i+1} \equiv b_1) \wedge \ldots \wedge (v_{i+k} \equiv b_k)))$$

(Falls $i + j > s$, entfallen die entsprechenden Bedingungen $v_{i+j} \equiv b_j$.)
Dafür sind $z_{i,b_1,\dots,b_k}$ $2^k \cdot s$ viele neue Variablen.

Wie oben sind nur die z-Variablen solche mit nicht-verschwindenem Gewicht. Wir setzen hierbei

$$w(z_{i,b_1,\dots,b_k}) = \left\lceil \frac{c \cdot 2^s}{w(v_i) + \sum_{j=1}^{k} b_j w(v_{i+j})} \right\rceil$$

für eine genügend große Konstante c.

Nach einiger (hier fortgelassener) Rechnung findet man

$$\frac{c \cdot 2^s}{m(f_k(x), y)} \leq m(x, g(x, y)) < \frac{c \cdot 2^s}{m(f_k(x), y)} \cdot (1 + 2^{-k})$$

Dabei ist $g(x, y)$ wieder durch „Vergessen" der z-Belegung definiert. Wie zuvor erhält man:

$$R(x, g(x, y)) < (1 + 2^{-k}) R(f_k(x), y).$$

Unsere zuvor durchgeführte Rechnung entspricht dem Spezialfall $k = 0$.
Ist nun $r > 1$ vorgegeben, so wählen wir $k = k(r)$ so, dass $2^{-k(r)} \leq (r-1)/r$. Dann folgt aus $R(f_{k(r)}(x), y) \leq r$ nämlich

$$R(f_{k(r)}(x), y) < (1 + 2^{-k(r)}) R(f_{k(r)}(x), y) \leq r + r2^{-k(r)} \leq r + r - 1 = 1 + 2(r-1).$$

Mit $f(x, r) := f_{k(r)}(x)$ ist $(f, g, 2)$ eine AP-Reduktion von MAXWSAT auf MINWSAT. □

Folgerungen

Folgerung: Maximum Weighted 3-SAT ist NPO-vollständig.

Beweis: Die Überführung in KNF ist in Polynomzeit möglich, ansonsten betrachte den klassischen Beweis, s.o. $\square$

Analog sieht man:

Folgerung: Minimum Weighted 3-SAT ist NPO-vollständig. $\square$

Folgerung: Minimum $\{0, 1\}$-LP ist NPO-vollständig.

Beweis: Kombiniere die vorige Folgerung und (den Beweis vom) 1. Lemma. $\square$