

# Näherungsalgorithmen (Approximationsalgorithmen)

WiSe 2008/09 in Trier

Henning Fernau

Universität Trier

fernau@uni-trier.de

# Näherungsalgorithmen

Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

## Grundtechniken

- Greedy-Verfahren
- Partitionsprobleme
- Lokale Suche
- Lineares Programmieren
- Dynamisches Programmieren

## Dynamisches Programmieren

- exaktes Verfahren
- Buchführung vermeidet Mehrfachberechnung (Tabelle)
- Tabelle wird “bottom-up” aufgebaut
- Beispiel: CYK-Algorithmus zum Parsen von kontextfreien Sprachen, bekannt aus Theoretischer Informatik / Compilerbau

Erinnerung: **Maximum Knapsack (Rucksackproblem)**

I: endliche Menge  $X$  bzw. „Liste“  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Profitfunktion  $p : X \rightarrow \mathbb{N}$  bzw. „Liste“  $\{p_1, \dots, p_n\}$

Größenfunktion  $a : X \rightarrow \mathbb{N}$  bzw. „Liste“  $\{a_1, \dots, a_n\}$

Fassungsvermögen  $b \in \mathbb{N}$  des Rucksacks

[O.E.:  $\forall 1 \leq i \leq n : a_i \leq b$  im Folgenden]

S:  $\{Y \subseteq X \mid s(Y) = \sum_{x_i \in Y} a_i \leq b\}$

m:  $p(Y) = \sum_{x_i \in Y} p_i$

opt.: max

**Mitteilung:** Knapsack ist NP-vollständig.

## Ein exakter Algorithmus für das Rucksackproblem

Für das dynamische Programmieren betrachten wir für jedes  $1 \leq k \leq n$  und jedes  $0 \leq p \leq \sum_{i=1}^n p_i$  das **Problem**, eine Teilmenge von  $\{x_1, \dots, x_k\}$  zu finden mit Gesamtprofit  $p$  und Gesamtgröße höchstens  $b$ .

Es bezeichnen  $M^*(k, p) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$  eine optimale Lösung dieses Problems und  $S^*(k, p)$  die entsprechende Gesamtgröße.

Sonderfall:  $S^*(k, p) := 1 + \sum_{i=1}^n a_i$  (“unendlich”), falls  $M^*(k, p)$  undefiniert.

Damit gilt

$$M^*(1, p) = \begin{cases} \emptyset, & p = 0 \\ \{x_1\}, & p = p_1 \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $k \geq 2$  gilt der folgende (rekursive) Zusammenhang:

$$M^*(k, p) = \begin{cases} M^*(k-1, p - p_k) \cup \{x_k\} & \text{falls gilt: (i) } p_k \leq p, \\ & \text{(ii) } M^*(k-1, p - p_k) \text{ ist definiert,} \\ & \text{(iii) } S^*(k-1, p) \\ & \qquad \qquad \qquad \geq S^*(k-1, p - p_k) + a_k \\ & \text{(iv) } S^*(k-1, p - p_k) + a_k \leq b \\ M^*(k-1, p) & \text{sonst} \end{cases}$$

KnapsackDynProg ( $X = \{x_1, \dots, x_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}, \{a_1, \dots, a_n\}, b$ )

1. Für  $p := 0$  bis  $\sum_{i=1}^n p_i$  tue

1a. Setze  $M^*(1, p) :=$  undefiniert

1b. Setze  $S^*(1, p) := 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

2a.  $M^*(1, 0) := \emptyset; S^*(1, 0) := 0;$

2b.  $M^*(1, p_1) := \{x_1\}; S^*(1, p_1) := a_1;$

3. Hauptprogramm...

4. Sei  $p^*$  das maximale  $p$ , für das  $M^*(n, p)$  definiert ist.

(Beachte:  $M^*(n, 0) = \emptyset$  ist stets definiert!)

Liefere  $M^*(n, p^*)$ .



## Hauptprogramm

3. Für  $n := 2$  bis  $n$  tue:

Für  $p := 0$  bis  $\sum_{i=1}^n p_i$  tue:

3a. Falls  $p_k \leq p$  und  $M^*(k-1, p-p_k)$  ist definiert  
und  $S^*(k-1, p-p_k) + a_k \leq \min\{b, S^*(k-1, p)\}$   
dann

3a1. Setze  $M^*(k, p) := M^*(k-1, p-p_k) \cup \{x_k\}$

3a2. Setze  $S^*(k, p) := S^*(k-1, p-p_k) + a_k$

3b. sonst

3b1. Setze  $M^*(k, p) := M^*(k-1, p)$ ;

3b2. Setze  $S^*(k, p) := S^*(k-1, p)$

**Satz 1:** KnapsackDynProg findet stets eine optimale Lösung, und zwar in Zeit

$$O\left(n \cdot \sum_{i=1}^n p_i\right).$$

Hinweis: Diese Laufzeit ist *nicht* polynomiell, da die  $p_i$  als binär codiert angenommen werden. Solche so genannten *pseudopolynomialen* Algorithmen untersuchen wir näher im Kapitel über Approximationsschemata.

## Ein Näherungsverfahren für das Rucksackproblem

KnapsackFPTAS ( $X = \{x_1, \dots, x_n\}, \{p_1, \dots, p_n\}, \{a_1, \dots, a_n\}, b, r$ )  
( $r \in \mathbb{Q}, r > 1$  ist der angestrebte Approximations-Leistungs-Faktor)

1.  $p_{\max} := \max\{p_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ;
2.  $t := \left\lceil \log_2\left(\frac{r-1}{r} \cdot \frac{p_{\max}}{n}\right) \right\rceil$ ;
3.  $x' :=$  Instanz mit Profiten  $p'_i := \lfloor p_i/2^t \rfloor$ ;
4. Liefere KnapsackDynProg( $x'$ ).

**Satz 2:** Ggb: Instanz  $x$  von MaximumKnapsack (mit  $n$  Gegenständen) und  $r > 1, r \in \mathbb{Q}$ . KnapsackFPTAS( $x$ ) liefert eine Lösung in Zeit  $O(r \cdot n^3 / (r - 1))$ , deren Maß  $m_{AS}(x, r)$  der Ungleichung  $m^*(x) / m_{AS}(x, r) \leq r$  genügt.

Beweis: Es bezeichne  $Y(x, r)$  die von KnapsackFPTAS gelieferte Lösung und  $Y^*(x)$  eine optimale Lösung von Instanz  $x$  (mit Maß  $m^*(x)$ ).

$$\begin{aligned}
 m_{AS}(x, r) &= \sum_{x_j \in Y(x, r)} p_j && \geq \sum_{x_j \in Y(x, r)} 2^t \cdot \lfloor p_j / 2^t \rfloor \\
 & \text{(nach Def. der } \lfloor \cdot \rfloor \text{-Funktion)} && \\
 & && \geq \sum_{x_j \in Y^*(x)} 2^t \cdot \lfloor p_j / 2^t \rfloor \\
 & \text{(denn } \sum_{x_j \in Y(x, r)} \lfloor p_j / 2^t \rfloor \text{ ist} && \\
 & \text{der optimale Wert des} && \\
 & \text{„skalierten Problems“)} && \\
 & && \geq \sum_{x_j \in Y^*(x)} (p_j - 2^t) \\
 & \text{(nach Def. der } \lfloor \cdot \rfloor \text{-Funktion)} && \\
 & && \geq \left( \sum_{x_j \in Y^*(x)} p_j \right) - 2^t \cdot |Y^*(x)| \\
 & && = m^*(x) - 2^t \cdot |Y^*(x)|
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \leadsto m^*(x) - m_{AS}(x, r) \leq 2^t \cdot |Y^*(x)| \leq 2^t \cdot n \\ \text{Offenbar gilt ferner: } n \cdot p_{\max} \geq m^*(x) \geq p_{\max} \end{array} \right\} \leadsto$$

(Hierbei Annahme, dass alle Gegenstände der Instanz in den leeren Rucksack passen.)

$$\leadsto \frac{m^*(x) - m_{AS}(x, r)}{m^*(x)} \leq \frac{n \cdot 2^t}{p_{\max}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m^*(x) &\leq \frac{p_{\max}}{p_{\max} - n \cdot 2^t} m_{AS}(x, r) \\ &\leq \frac{p_{\max}}{p_{\max} - n \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \frac{p_{\max}}{n}} m_{AS}(x, r) \\ &= r \cdot m_{AS}(x, r) \end{aligned}$$

Laufzeitabschätzung:

$$\begin{aligned} O\left(n \cdot \sum_{i=1}^n p'_i\right) &= O\left(n \cdot \sum_{i=1}^n n \frac{p_i}{2^t}\right) \\ &\leq O\left(n^2 \frac{p_{\max}}{2^t}\right) \\ &\leq O\left(n^2 \frac{p_{\max}}{\frac{r-1}{r} \cdot \frac{p_{\max}}{n}}\right) \\ &= O\left(n^3 \cdot \frac{r}{r-1}\right) \quad \square \end{aligned}$$

# Was tun bei konkreten Problemen?

- Probiere bisher kennengelernte Strategien.
- Gibt es bekannte Polynomzeitalgorithmen für “ähnliche” Probleme?

## Billigste Erweiterung zu starkem Zusammenhang

I :  $G = (V, A)$  gerichteter, vollständiger Graph  
mit Kantenkostenfunktion  $c : A \rightarrow \mathbb{N}$ ,  
eine vorliegende Kantenmenge  $A_0$

S :  $\{A_1 \subseteq A \setminus A_0 \mid (V, A_0 \cup A_1) \text{ ist stark zusammenhängend}\}$   
Ein gerichteter Graph heißt *stark zusammenhängend*, wenn es  
zwischen je zwei Knoten einen (gerichteten) Pfad gibt.

m :  $c(A_1)$

opt : min.

Hinweis: Das Problem ist NP-vollständig.

Ein mögliche Idee:

Bekanntermaßen lässt sich ein minimaler Spannbaum in Polynomzeit finden.

Kann man nun erzwingen, dass (durch geeignete Modifikation der Kantengewichte) zwei gerichtete Bäume  $T_1$  und  $T_2$  (aufgefasst als Kantenmenge) mit **gleicher Wurzel  $r$ , aber unterschiedlicher Pfeilrichtung** gefunden werden, so gibt es in dem Graphen, der nur aus den so gewichteten Baumkanten besteht, zwischen je zwei Knoten  $x$  und  $y$  jedenfalls einen Pfad von  $x$  nach  $y$ , der über  $r$  führt.

So ließe sich eine 2-Approximation gewinnen, denn eine optimale Erweiterung  $C^*$  müsste (in gewissem Sinne) auch die Bäume  $T_1$  und  $T_2$  enthalten.



STC( $G = (V, A), c, A_0$ )

1. Definiere neue Abstandsfunktion  $d_1$  wie folgt:

$$d_1(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (v, u) \in A_0 \\ c((v, u)), & \text{falls } (v, u) \notin A_0 \end{cases}$$

2. Finde minimalen Spannbaum  $T_1$  (aufgefasst als Kantenmenge).

Sei  $r$  die Wurzel von  $T_1$ .

Setze  $A_1 = \{(u, v) \mid (v, u) \in T_1\}$ .

3. Definiere Abstandsfunktion  $d_2$  wie folgt:

$$d_2(u, v) = \begin{cases} \infty, & v = r \\ 0, & (u, v) \in (A_0 \cup A_1) \wedge v \neq r \\ c(u, v), & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Finde minimalen Spannbaum  $T_2$  (mit Abstandsfunktion  $d_2$ ).

5. Liefere  $(A_1 \cup T_2) \setminus A_0$ .

**Satz:** STC ist eine 2-Approximation für das Problem, eine billigste Erweiterung zu starkem Zusammenhang zu finden.

Beweis: Durch die Definition von  $d_2$  wird erzwungen, dass  $r$  (ebenfalls) die Wurzel von  $T_2$  ist, sodass tatsächlich eine Erweiterung geliefert wird, die starken Zusammenhang garantiert. In Schritt 2 wird eine Kantenmenge  $T_1$  gefunden, sodass jeder Knoten mit der Wurzel  $r$  durch einen Pfad verbunden ist. In einer optimalen Erweiterung  $C^*$  gibt es natürlich auch einen solchen Pfad. Da  $T_1$  minimal ist, gilt  $c(T_1 \setminus A_0) = d_1(T_1) \leq d_1(C^*) = c(C^*)$ .

Entsprechend sieht man:

$$c(T_2 \setminus (A_0 \cup T_1)) = d_2(T_2) \leq d_2(C^*) \leq c(C^*). \quad \square$$

## Literatur:

- K. P. Eswaran and R. E. Tarjan: Augmentation problems. *SIAM J. Computing* 5(1976), 653–665.
- G. N. Frederickson and J. Jájá: Approximation algorithms for several graph augmentation problems. *SIAM J. Computing* 10(1981), 270–283.
- H. Nagamochi and T. Ibaraki: An approximation for finding the smallest 2-edge connected subgraph containing a specified spanning tree. In: T. Asano u.a. (Herausgeber), *Proc. COCOON'99*, LNCS Band 1627, pp. 221–230. Springer, 1999.

# Approximationsklassen

- $\rightsquigarrow$  (strukturelle) Komplexitätstheorie
- Phänomenologie der Komplexitätsklassen:  
Welche Effekte können bei Näherungsalgorithmen auftreten?
- Insbesondere:  
Feinstruktur von NPO

## Absolute Approximation

- Ziel: Annäherung bis auf konstanten Summanden
- Natürlich “schöner” als relative Approximation
- Aber: fast “nie” möglich!  
Warum?  
~> Dieses Kapitel!

## Absoluter Fehler

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $\mathcal{P}$ . Dann ist für jede Instanz  $x$  von  $\mathcal{P}$  und jede zulässige Lösung  $y$  von  $x$  der *absolute Fehler* von  $y$  bezüglich  $x$  definiert als

$$D(x, y) := |m^*(x) - m(x, y)|$$

Dabei ist wiederum  $m^*(x)$  der Wert einer optimalen Lösung der Instanz  $x$  und  $m(x, y)$  sei der Wert der Lösung  $y$ .

Ist  $\mathcal{A}$  ein Approximationsalgorithmus (Näherungsalgorithmus) für  $\mathcal{P}$ , d.h. gilt

$$\forall x \in I_{\mathcal{P}} : \mathcal{A}(x) \in S_{\mathcal{P}}(x),$$

so heißt  $\mathcal{A}$  *absoluter Approximationsalgorithmus*, wenn es eine Konstante  $K$  gibt, so dass für alle  $x \in I_{\mathcal{P}} : D(x, \mathcal{A}(x)) \leq K$  gilt.

**Eulerscher Polyedersatz:** Für planare Graphen gilt:

$$f - m + n = 2.$$

$f$  = # Flächen des (als eingebettet gedachten) Graphen.

$m$  = # Kanten

$n$  = # Knoten

Daraus folgt:  $m \leq 3n - 6$ .

Bezeichnet nämlich  $\ell_i$  die Anzahl der an Fläche  $F_i$  angrenzenden Kanten, so gilt, da  $\forall i (\ell_i \geq 3)$ :

$$2m = \sum_{i=1}^f \ell_i \geq 3f = 3m - 3n + 6.$$

**Daher gilt:**

(\*) Jeder planare Graph enthält wenigstens einen Knoten von Grad 5.

Sonst wäre  $2m = \sum_{i=1}^n d(v_i) \geq 6n$ , also  $m \geq 3n$ , im Widerspruch zum soeben Hergeleiteten.

## Das Färben von planaren Graphen

Aus früheren Überlegungen folgern wir:

**Satz 1:** Betrachte die Knotenmenge des Eingabegraphen  $G = (V, E)$  als geordnet:  $(v_1, \dots, v_n)$ . (Reihenfolge, in der die Partitionsheuristik arbeitet.)

Es sei  $G_i = G(\{v_1, \dots, v_i\})$ ;  $d_i(v)$  bezeichne den Grad von  $v$  in  $G_i$ .

Die Partitionsheuristik benötigt dann höchstens

$$1 + \max_{1 \leq i \leq n} d_i(v_i)$$

viele Farben zum Färben von  $G_i$ .

□



Wir wollen jetzt die **Ordnung der Knoten genauer** festlegen:

$v_n$  sein ein Knoten minimalen Grades in  $G = (V, E)$ .

Induktiv gehen wir davon aus, die Reihenfolge  $(v_{i+1}, \dots, v_n)$  sei bereits festgelegt. Dann sei  $v_i$  ein Knoten minimalen Grades in  $G(V \setminus \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$ .

**Satz 2:** Ist  $G$  ein planarer Graph, so benötigt die Partitionsheuristik mit der soeben definierten Knotenordnung höchstens 6 Farben zum Färben von  $G$ .

Beweis: Wegen Satz 1 reicht es zu zeigen, dass

$$\max\{d_i(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \leq 5.$$

Aus (\*) ergibt sich  $\forall i : d_i(v_i) \leq 5$ , da stets ein kleinstgradiger Knoten  $v_i$  in  $G_i = G(\{v_1, \dots, v_i\})$  ausgewählt wird und alle  $G_i$  planar sind, weil  $G = G_n$  planar ist und die planaren Graphen unter der Operation „Fortlassen von Knoten und inzidenten Kanten“ abgeschlossen sind.  $\square$

**Folgerung:** Das Satz 2 zu Grunde liegende Verfahren ist ein absoluter Approximationsalgorithmus zum Färben planarer Graphen. Die absolute Fehlerschranke von 5 lässt sich noch auf 3 reduzieren, da 2-färbbare Graphen mit einer Greedy-Strategie optimal gefärbt werden können.

Typischer ist aber die folgende Situation:

**Satz 3:** Unter der Annahme  $P \neq NP$  gilt:

Es gibt keinen polynomiellen absoluten Approximationsalgorithmus für MaximumKnapsack.

Beweis: Es sei  $X$  eine Menge Gegenstände sowie zugehörigen Profiten  $p_i$  und Größen  $a_i$  und  $b$  die Rucksackkapazität. Gäbe es einen polynomiellen absoluten Approximationsalgorithmus für MaximumKnapsack mit Fehlerschranke  $K$ , so könnten wir das Rucksackproblem in Polynomialzeit wie folgt lösen:

Wir generieren eine neue Instanz, indem wir alle Profite mit  $(K + 1)$  multiplizieren. Die Menge der zulässigen Lösungen wird dadurch nicht verändert. Der Wert jeder Lösung ist nun aber ein Vielfaches von  $K + 1$ , was zur Folge hat, dass jede Lösung mit absolutem Fehler  $K$  bereits optimal ist.  $\square$

# Relative Approximation; die Klasse APX

- unser bisheriger “Standard”
- im Folgenden: Grundbegriffe und Beispiele
- Gap-Technik

Ist  $\mathcal{P}$  ein Optimierungsproblem, so ist —für jede Instanz  $x$  von  $\mathcal{P}$  und für jede zulässige Lösung  $y$  von  $x$ — der *relative Fehler* von  $y$  bezüglich  $x$  definiert als

$$E(x, y) := \frac{|m^*(x) - m(x, y)|}{\max\{m^*(x), m(x, y)\}} = \frac{D(x, y)}{\max\{m^*(x), m(x, y)\}}.$$

Ist  $\mathcal{A}$  ein Approximationsalgorithmus für  $\mathcal{P}$ , so heißt  $\mathcal{A}$   *$\epsilon$ -Approximation*, wenn

$$\forall x \in I_{\mathcal{P}} : E(x, \mathcal{A}(x)) \leq \epsilon.$$

**Bem.:** Der relative Fehler ist gleich Null, wenn die Lösung optimal ist, und er liegt nahe bei Eins, wenn die Lösung schlecht ist.

Ist  $\mathcal{P}$  ein Optimierungsproblem, so ist —für jede Instanz  $x$  von  $\mathcal{P}$  und für jede zulässige Lösung  $y$  von  $x$ — die *Leistungsgüte* (engl: performance ratio) von  $y$  bezüglich  $x$  definiert als

$$R(x, y) := \max \left\{ \frac{m^*(x)}{m(x, y)}, \frac{m(x, y)}{m^*(x)} \right\}.$$

Ist  $\mathcal{A}$  ein Approximationsalgorithmus für  $\mathcal{P}$ , so heißt  $\mathcal{A}$  *r-Approximation*, wenn

$$\forall x \in I_{\mathcal{P}} : R(x, \mathcal{A}(x)) \leq r.$$

**Bem.:** Die Leistungsgüte ist gleich Eins, wenn die Lösung optimal ist, und sie ist sehr groß, wenn die Lösung schlecht ist. Offenbar gilt:

$$E(x, y) = 1 - \frac{1}{R(x, y)}.$$

## Relativer Fehler versus Leistungsgüte

Offenbar gilt: 
$$E(x, y) = 1 - \frac{1}{R(x, y)}.$$

Ist nämlich  $\mathcal{P}$  ein Maximierungsproblem, so ist:

$$1 - \frac{1}{R(x, y)} = 1 - \frac{1}{\frac{m^*(x)}{m(x, y)}} = 1 - \frac{m(x, y)}{m^*(x)} = \frac{m^*(x) - m(x, y)}{m^*(x)}.$$

Ist  $\mathcal{P}$  ein Minimierungsproblem, so gilt:

$$1 - \frac{1}{R(x, y)} = 1 - \frac{m^*(x)}{m(x, y)} = \frac{m(x, y) - m^*(x)}{m(x, y)}.$$

Die (diversen) Näherungsalgorithmen für das Knotenüberdeckungsproblem sind sowohl  $\frac{1}{2}$ -Approximation (im Sinne des relativen Fehlers) als auch 2-Approximation (im Sinne der Leistungsgüte).

## Die Klasse APX

$\mathcal{P}$  heißt  $\epsilon$ -*approximierbar* (bzw.  $r$ -*approximierbar*), wenn es eine Polynomzeit- $\epsilon$ -Approximation (bzw.  $r$ -Approximation) für  $\mathcal{P}$  gibt.

$APX$  ist die Klasse aller NPO-Probleme, die  $r$ -approximierbar für ein  $r \geq 1$  sind.



## Asymptotische Approximation

Algorithmen  $\mathcal{A}$ , die (im Minimierungsfall)

$$m_{\mathcal{A}}(x, y) \leq r \cdot m^*(x) + k$$

erfüllen, sind „nur“  $(r + k)$ -Approximationen (im Sinne von unserer Definition), werden aber oft als  $r$ -Approximationen in der Literatur angesprochen.

Wir werden solche Algorithmen *asymptotische  $r$ -Approximationen* nennen.

Im Zusammenhang mit Approximationsschemata ist dieser Unterschied bedeutender, siehe unten!

## Ein (weiteres) Beispiel aus APX: MAXSAT

I : Menge  $C$  von Klauseln über einer Menge  $V$  von Variablen  
(Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen.  
Ein Literal ist eine Variable oder ihre Negation.  
Formal ist  $C$  als Menge von Mengen von Literalen aufzufassen.)

S : Menge der Wertzuweisungen  $f : V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$

$m : |\{c \in C \mid f(c) = \text{true}\}|$

opt : max

**Beispiel:** Die KNF-Formel  $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$  würden wir als  $C = \{\{x, \bar{y}\}, \{\bar{x}, y\}\}$  schreiben.

GreedySAT( $C, V$ )

1. Für alle  $v \in V$  setze  $f(v) := \text{true}$ ; (Anfangsbelegung)
2. Wiederhole, solange  $C \neq \emptyset$ :
  - 2a. Es sei  $\ell$  ein Literal, das in einer maximalen Zahl von Klauseln vorkommt; es sei  $x$  die zugehörige Variable.
  - 2b. Bestimme die Menge  $C_x$  von Klauseln, in denen  $x$  vorkommt.
  - 2c. Bestimme die Menge  $C_{\bar{x}}$  von Klauseln, in denen  $\bar{x}$  vorkommt.
  - 2d. Ist  $\ell = x$ , so
    - 2d(i)  $C := C \setminus C_x$ ;
    - 2d(ii) Lösche  $\bar{x}$  aus allen Klauseln in  $C_{\bar{x}} \setminus C_x$
    - 2d(iii) Lösche alle leeren Klauseln aus  $C$ .
  - 2e. sonst:
    - 2e(0)  $f(x) := \text{false}$ ;
    - 2e(i)  $C := C \setminus C_{\bar{x}}$ ;
    - 2e(ii) Lösche  $x$  aus allen Klauseln  $C_x \setminus C_{\bar{x}}$ ;
    - 2e(iii) Lösche alle leeren Klauseln aus  $C$ .
3. Liefere  $f$  zurück.

**Satz:** GreedySAT ist eine Polynomzeit-2-Approximation für MAXSAT.

Beweis: Per Induktion über die Anzahl der Variablen zeigen wir:

**Behauptung:** Ist eine Instanz mit  $c$  Klauseln gegeben, so liefert GreedySAT stets eine Lösung, die mindestens  $c/2$  der Klauseln erfüllt.

Da trivialerweise  $c$  eine obere Schranke für den Wert einer optimalen Lösung ist, folgt so die Behauptung.

**IA:** Im Fall, dass es nur eine Variable gibt, folgt die Behauptung trivial.

**IV:** Es werde nun angenommen, die Behauptung sei für  $n - 1$  Variablen ( $n > 1$ ) bewiesen.

**IB:** Dann gilt die Behauptung auch für  $n$  Variablen.

**Beweis von IB:** Von GreedySAT werde als erstes die Variable  $x$  betrachtet.

Es seien  $c_x$  bzw.  $c_{\bar{x}}$  die Anzahl der Klauseln, in denen  $x$  bzw.  $\bar{x}$  vorkommen.

O.E. betrachten wir  $c_x \geq c_{\bar{x}}$ , d.h., GreedySAT wird  $x$  auf true setzen.

Nach dieser Zuweisung müssen (nach Schritt 2d(i) bzw. 2d(iii)) noch  $\tilde{c} \geq c - c_x - c_{\bar{x}}$  viele Klauseln (mit  $n - 1$  Variablen) betrachtet wurden.

Nach IV werden daher von GreedySAT wenigstens  $\tilde{c}/2 \geq (c - c_x - c_{\bar{x}})/2$  der  $\tilde{c}$  vielen Klauseln erfüllt.

Insgesamt werden daher wenigstens  $c_x + (c - c_x - c_{\bar{x}})/2 = \frac{c + c_x - c_{\bar{x}}}{2} \geq \frac{c}{2}$  Klauseln der ursprünglichen Klauselmenge erfüllt. □

## Nicht alles in APX?!

### Das Handlungsreisendenproblem MTS

**Satz:** Wenn das allgemeine Handlungsreisendenproblem MTS zu APX gehörte, dann wäre  $P = NP$ .

**Folgerung:** Ist  $P \neq NP$ , so ist  $APX \neq NPO$ . □

Beweis: Wir beweisen das Resultat durch Reduktion vom Hamiltonschen Kreisproblem.

Ein **Hamiltonscher Kreis** ist dabei eine Permutation  $(v_1, \dots, v_n)$  der Knoten eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , sodass  $\forall 1 \leq i \leq n \{v_i, v_{i+1}\} \in E$  (der Einfachheit halber sei  $v_{n+1} = v_1$ ).

Für jedes  $r \geq 1$  konstruieren wir eine Instanz von MTS derart, dass aus der Existenz einer  $r$ -Approximation für MTS folgen würde, dass es einen Polynomzeitalgorithmus zum Hamiltonschen Kreisproblem gäbe. Da das Hamiltonsche Kreisproblem NP-vollständig ist, folgt die Behauptung.

Geben wir uns also ein  $r \geq 1$  vor. Ist  $G = (V, E)$  eine Hamiltonsche Kreisprobleminstanz, so definieren wir (auf derselben Knotenmenge  $V$ ) eine Abstandsfunktion  $d$ , die zusammen mit  $V$  das fragliche MTS-Problem angibt. Setze dazu:

$$d(u, v) := \begin{cases} 1, & \{u, v\} \in E \\ 1 + |V| \cdot r, & \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

MTS hat eine (minimale) Lösung vom Wert  $|V|$  gdw.  $G$  einen Hamiltonschen Kreis enthält.

Eine  $r$ -Approximation  $\mathcal{A}$  für MTS könnte wie folgt zum Lösen des Hamiltonschen Kreisproblems verwendet werden:

- Liefert  $\mathcal{A}$  einen Wert  $\leq r \cdot |V|$  zurück, so hatte das ursprüngliche Kreisproblem eine Lösung.
  - Liefert  $\mathcal{A}$  einen Wert  $> r \cdot |V|$  zurück, so war das ursprüngliche Kreisproblem unlösbar.
-