Näherungsalgorithmen

(Approximationsalgorithmen)

WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Näherungsalgorithmen Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

Zusammenfassung des bisher Beobachteten:

- Bisher kennengelernte Näherungsalgorithmen sind oft sehr kurze Programmstücke

- Schwierigkeit: Analyse, betreffend die **Güte** der Näherung!

- Warum sind die Gütegarantien schwierig zu beweisen?
  Grundsätzlich (und intuitiv) lässt sich dies genau so begründen wie die vermutete Ungleichheit von P und NP.

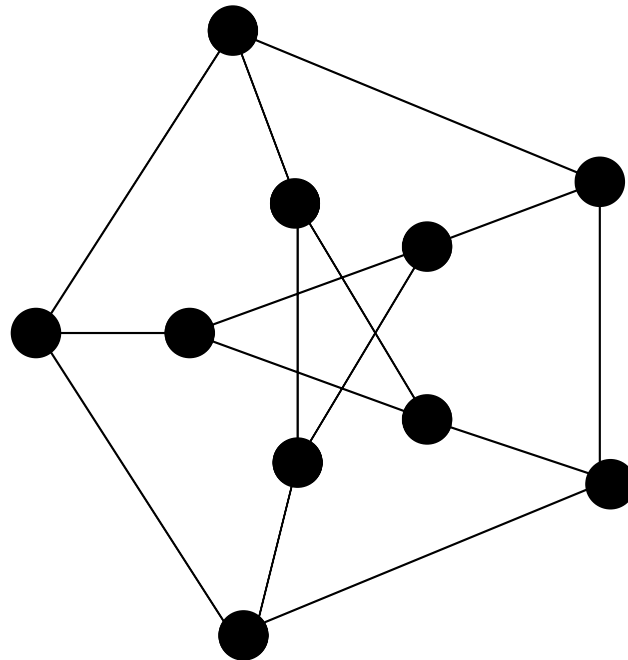
Knotenüberdeckungsproblem

+ Es ist leicht, eine vorgegebene Lösung insofern zu verifizieren, als dass die Knotenüberdeckungseigenschaft überprüft wird.

- Es ist schwierig nachzuweisen, dass eine gefundene Knotenüberdeckung kleinstmöglich (optimal) ist.

Konkret: Betrachten Sie den Petersen-Graph.

Der Petersen-Graph



Ein *Optimierungsproblem* $\mathcal{P}$ wird beschrieben durch ein Quadrupel $(I_{\mathcal{P}}, S_{\mathcal{P}}, m_{\mathcal{P}}, \text{opt}_{\mathcal{P}})$:

1. $I_{\mathcal{P}}$ ist die Menge der möglichen Eingaben (*Instanz*en),
2. $S_{\mathcal{P}} : I_{\mathcal{P}} \to$ Menge der *zulässigen Lösungen* (feasible solutions),
3. $m_{\mathcal{P}} : (x, y) \mapsto m_{\mathcal{P}}(x, y) \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Q}$, ...) für $x \in I_{\mathcal{P}}, y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ liefert den *Wert* der zulässigen Lösung y und
4. $\text{opt}_{\mathcal{P}} \in \{\min, \max\}$: $\mathcal{P}$ Minimierungs- oder Maximierungsproblem ?

$I_{\mathcal{P}}$ und $S_{\mathcal{P}}(x)$ sind —geeignet codierte— formale Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

Weitere Bezeichnungen

$S^*_\mathcal{P} : I_\mathcal{P} \to$ Menge der *bestmöglichen Lösungen* (optimum solution), d.h.

$$\forall x \in I_\mathcal{P}\ \forall y^*(x) \in S^*_\mathcal{P}(x) : m_\mathcal{P}(x, y^*(x)) = \mathsf{opt}_\mathcal{P}\{m_\mathcal{P}(x,z) \mid z \in S_\mathcal{P}(x)\}.$$

Der Wert einer bestmöglichen Lösung wird auch $m^*_\mathcal{P}(x)$ notiert.

Ist $\mathcal{P}$ aus dem Zusammenhang klar, so schreiben wir kurz —unter Fortlassung des Indexes $\mathcal{P}$— $I, S, m,$ opt, S^*, m^*.

Hinweis: Wir benutzten schon früher C^* für eine kleinstmögliche Überdeckung.

Problemvarianten

Konstruktionsproblem (construction problem):

$$\mathcal{P}_C : \text{Ggb. } x \in I_{\mathcal{P}}, \text{liefere ein } y^*(x) \in S^*_{\mathcal{P}}(x) \text{ sowie ihren Wert } m^*_{\mathcal{P}}(x)$$

Auswertungsproblem (evaluation problem):

$$\mathcal{P}_E : \text{Ggb. } x \in I_{\mathcal{P}}, \text{ liefere } m^*_{\mathcal{P}}(x)$$

Entscheidungsproblem (decision problem):

$$\mathcal{P}_D : \text{Ggb. } x \in I_{\mathcal{P}} \text{ und Parameter } k \in \mathbb{N}, \text{ entscheide ob}$$

$$m^*_{\mathcal{P}}(x) \geq k, \quad (\text{falls opt}_{\mathcal{P}} = \max)$$

bzw. ob

$$m^*_{\mathcal{P}}(x) \leq k, \quad (\text{falls opt}_{\mathcal{P}} = \min).$$

Ein Beispiel: das Knotenüberdeckungsproblem VC

1. $I = \{G = (V, E) \mid$ G ist Graph $\}$

2. $S(G) = \{U \subseteq V \mid \forall \{x, y\} \in E : x \in U\}$ (Knotenüberdeckungseigenschaft)

3. $m = |U|$

4. opt $= \min$

VC_D ist dann das entsprechende „parametrisierte Problem", d.h. ggb. Graph $G = (V, E)$ und Parameter k, gibt es eine Knoteüberdeckung $U \subseteq V$ mit $|U| \leq k$?

Die Klassen PO und NPO

$\mathcal{P} = (I, S, m, \text{opt})$ gehört zu NPO, gdw:

1. $x \stackrel{?}{\in} I$ ist in Polynomialzeit entscheidbar.

2. Es gibt ein Polynom q derart, dass $\forall x \in I \; \forall y \in S(x) : |y| \leq q(|x|)$ und für alle y mit $|y| \leq q(|x|)$ ist die Frage $y \stackrel{?}{\in} S(x)$ in Polynomialzeit entscheidbar.

3. m ist in Polynomialzeit berechenbar.

Beispiel VC: zu Punkt 2: Jede Knotenüberdeckung ist in ihrer Größe trivialerweise durch die Mächtigkeit der Knotenmenge beschränkt.

Satz 1: Ist $\mathcal{P} \in$ NPO, so ist $\mathcal{P}_D \in$ NP.

Beweis: (nur für $\text{opt}_{\mathcal{P}} = \max$), $\mathcal{P}_D$ lässt sich bei Eingabe von $x \in I$ und k wie folgt lösen (in nichtdeterministischer Weise):

1. Rate y mit $|y| \leq q(|x|)$ in Zeit $\mathcal{O}(q(|x|))$. ($q(|x|)$ Bits sind zu raten)
2. Teste $y \in S(x)$ in Polynomialzeit.
3. Falls $y \in S(x)$, berechne $m(x, y)$ in Polynomialzeit.
4. Falls $y \in S(x)$ und $m(x, y) \geq k$, antworte JA.
5. Falls $y \notin S(x)$ oder $m(x, y) < k$, antworte NEIN.

Die Klasse PO

Ein Optimierungsproblem $\mathcal{P}$ gehört zur Klasse PO gdw. $\mathcal{P}_C$ in Polynomialzeit gelöst werden kann.

Beachte: PO über das zugehörige Konstruktionsproblem definiert!

Erinnerung: (polynomielle) **Turing-Reduzierbarkeit**

$\mathcal{P}_1 \leq_T^{(p)} \mathcal{P}_2$ gdw.
es gibt eine Turing-Maschine, die eine Instanz x von $\mathcal{P}_1$ (in Polynomialzeit) mit Hilfe von Orakelanfragen bearbeiten kann.

Orakelanfragen sind generierte Instanzen von $\mathcal{P}_2$, die auf ein „Orakelband" geschrieben werden und angenommenerweise in konstanter Zeit beantwortet werden.

Wir schreiben $\mathcal{P}_1 \equiv_T^p \mathcal{P}_2$, falls sowohl $\mathcal{P}_1 \leq_T^p \mathcal{P}_2$ als auch $\mathcal{P}_2 \leq_T^p \mathcal{P}_1$ gelten.

Satz 2: $\forall \mathcal{P} \in$ NPO : $\mathcal{P}_D \equiv_T^p \mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_C$

Beweis: Klar: $\mathcal{P}_D \leq_T^p \mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_C$.
Z.z: $\mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_D$.
Dazu überlegen wir uns:

$$\{m_{\mathcal{P}}(x, y) \mid y \in S_{\mathcal{P}}(x)\} \subseteq 0 \dots 2^{p(|x|)} \tag{1}$$

für ein Polynom p.
Dann kann $\mathcal{P}_E$ durch binäre Suche auf dem Intervall $0 \dots 2^{p(|x|)}$ mit $p(|x|)$ vielen Orakelanfragen an $\mathcal{P}_D$ gelöst werden.

Da $\mathcal{P} \in$ NPO, ist $m_{\mathcal{P}}(x, y)$ in Zeit $r(|x|, |y|)$ für ein Polynom r berechenbar. $\rightsquigarrow$

$$0 \leq m_{\mathcal{P}}(x, y) \leq 2^{r(|x|,|y|)}$$

Da $\mathcal{P} \in$ NPO, ist $|y| \leq q(|x|)$ für alle $y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ für ein Polynom q.
Daher gilt für das Polynom $p(n) := r(n, q(n))$ die Beziehung (1).

Das Beispiel MAXCLIQUE

Ein *vollständiger Graph* mit n Knoten ist (isomorph zu, i.Z. $\cong$)

$$K_n = (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}).$$

Eine *Clique* in einem Graphen ist eine Knotenteilmenge, die einen vollständigen Graphen induziert. Das MAXCLIQUE-Problem fragt in einem Graphen nach größtmöglichen (maximum) Cliquen.

Unter Benutzung des oben eingeführten Formalismus zur Spezifizierung von Optimierungsproblemen stellt sich MAXCLIQUE wie folgt dar:

I : alle Graphen $G = (V, E)$
S : alle Cliquen in G, d.h. $U \subseteq V : G[U] \cong K_{|U|}$ (vollständiger Graph mit $|U|$ Knoten)
$m = |U|$
opt $= \max$

Algorithmus für $\text{MAXCLIQUE}_C \leq_T^p \text{MAXCLIQUE}_E$

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: eine größtmögliche Clique in G

begin

$k := \text{MAXCLIQUE}_E(G)$;

Falls $k = 1$ **liefere** irgendeinen Knoten in V

sonst finde Knoten $v \in V$ mit $k = \text{MAXCLIQUE}_E(G(N[v]))$

und **liefere** $\{v\} \cup \text{MAXCLIQUE}_C(G(N(v)))$.

end

Warum ist das Programm korrekt ?

- Die Auswahl „$v \in V$ mit $k = MC_E(G(N[v]))$“ garantiert, dass v in einer größtmöglichen Clique liegt.

- Es ist klar, dass $G(N(v))$ eine Clique (evtl. mehrere) der Größe $k-1$ enthält (und auch keine größere); eine dieser wird rekursiv gefunden.

Zeitkomplexität des Algorithmus ($n = \#$ Knoten):

$$\begin{aligned} T(1) &= \mathcal{O}(1) \\ T(n) &= (n+1) + T(n-1) \\ &\quad \hookrightarrow \text{Durchsuchen des Graphen} \\ &= (n+1) + n + \ldots + n + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

Satz 3: Ist $\mathcal{P} \in$ NPO und ist $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ NP-hart, so gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{C}} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_{\mathrm{D}}$.

Beweis: (für $\mathrm{opt}_{\mathcal{P}} = \max$).
Im Beweisgang werden wir ein anderes NPO-Problem $\mathcal{P}'$ konstruieren mit $\mathcal{P}_{\mathrm{C}} \leq_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}} \mathrm{P}'_{\mathrm{E}}$. Wegen Satz 1 ist $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ nach Vorraussetzung NP-vollständig, also gilt $\mathcal{P}'_{\mathrm{E}} \leq_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}} \mathcal{P}'_{\mathrm{D}} \leq_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}} \mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ wegen Satz 2, und die Transitivität der Reduktionsrelation liefert die Behauptung.
$\mathcal{P}'$ ist wie $\mathcal{P}$ definiert mit Ausnahme des Messfunktion $m_{\mathcal{P}'}$. Betrachte dazu ein Polynom q mit $\forall x \in I_{\mathcal{P}}\ \forall y \in S_{\mathcal{P}}(x), |y| \leq q(|x|)$ (s. Definition NPO). Mit anderen Worten: $S_{\mathcal{P}}(x) \subseteq \{0, 1\}^{\leq q(|x|)}$.

Setze nun $\tau(y) := 2^{q(|x|)-|y|}y$. Für jedes $y \in S_{\mathcal{P}}(x)$ bezeichne $\lambda(y)$ den Wert von $\tau(y)$, interpretiert als Ternärzahl. Daraus folgt: $0 \leq \lambda(y) \leq 3^{q(|x|)}$.
Außerdem gilt: $\forall y, y' \in S_{\mathcal{P}}(x) : y = y' \iff \tau(y) = \tau(y')$.
Setze für jedes $x \in I_{\mathcal{P}'} = I_{\mathcal{P}}$ und jedes $y \in S_{\mathcal{P}'} = S_{\mathcal{P}}$:

$$m_{\mathcal{P}'}(x, y) = 3^{q(|x|)+1} m_{\mathcal{P}}(x, y) + \lambda(y).$$

Beachte: $\mathcal{P}' \in$ NPO, denn $m_{\mathcal{P}'}$ ist in Polynomialzeit berechenbar, weil insbesondere die Exponentiation $3^{q(|x|)}$ nur $\mathcal{O}(q(|x|))$ viele Bits benötigt.
Damit: $\forall x\ \forall y_1, y_2 \in S_{\mathcal{P}'}(x) : y_1 \neq y_2 \to m_{\mathcal{P}'}(x, y_1) \neq m_{\mathcal{P}'}(x, y_2)$.

Also gibt es eine eindeutig bestimmte maximale zulässige Lösung $y^*_{\mathcal{P}'}(x)$ in $S^*_{\mathcal{P}'}(x)$. Nach Definition von $m_{\mathcal{P}'}$ gilt ferner:

$$(m_{\mathcal{P}'}(x, y_1) > m_{\mathcal{P}'}(x, y_2) \Rightarrow m_{\mathcal{P}}(x, y_1) \geq m_{\mathcal{P}}(x, y_2)).$$

Daraus folgt: $y^*_{\mathcal{P}'}(x) \in S^*_{\mathcal{P}}(x)$.
$y^*_{\mathcal{P}'}(x)$ kann wie folgt mit einem Orakel für $\mathcal{P}'_E$ in Polynomialzeit berechnet werden.

1. Bestimme $m^*_{\mathcal{P}'}(x)$ (Orakel!)

2. Berechne $\lambda(y^*_{\mathcal{P}'}(x)) = m^*_{\mathcal{P}'}(x) \mod 3^{q(|x|)+1}$.

3. Bestimme y aus $\lambda(y)$.

Daher kann $\mathcal{P}_C$ mit einem Orakel für $\mathcal{P}'_E$ in Polynomialzeit berechnet werden, denn $m^*_{\mathcal{P}}(x) = m_{\mathcal{P}}(x, y)$ für das mit oben stehendem Algorithmus berechnete y.

Kaffee und mehr
am Donnerstag 15. November 2012,
ab 16:00 Uhr an der
Fachhochschule/Schneidershof
Raum L 104

Gründung einer GI-Studierendengruppe

- Vernetzung von FH- und Uni-InformatikerInnen
- Einbindung in die Arbeit der GI-Regionalgruppe TR-LUX
- Einblicke in die Berufspraxis
- Engagement im Berufsverband GI wird durch kostenfreie Mitgliedschaft honoriert

Manuel Mesters, GI-Beirat für Studierende

Studierendengruppen in der GI: Sich organisieren!

Wer sind wir?
Wir sind DU! Wir sind alle Studentinnen und Studenten aus den verschiedensten Bereichen, Semestern und Abschluarten der Informatik, die sich außeruniversitär engagieren wollen.
Wir sind in Gruppen von motivierten Studierenden unserer Hochschule formiert und organisieren Veranstaltungen. Du findest uns bereits in: Bochum, Kassel, Wiesbaden, Lausitz, Chemnitz, München, Kiel, Aachen, Braunschweig ...bald auch bei Euch!

Warum sich ausseruniversitär engagieren?
Studieren schafft die Basis, die sog. Hard Skills für das spätere Berufsleben. Nicht weniger, aber auch nicht mehr! Die Informatik ist ein sehr breit gefächertes Fachgebiet, die in fast allen Bereichen des Lebens bereits Einzug erhalten hat und ständig Erneuerungen und Neu-Entwicklungen erfährt.
Durch die zahlreichen Verbindungen der Gesellschaft für Informatik e. V. bieten wir die Möglichkeit, bereits während des Studiums über den Curriculum-Tellerrand hinaus zu schauen und Theorie mit Praxis zu verknüpfen. Dies ermöglicht bereits sehr früh einen Einblick in das Berufsbild des Informatikers und in neueste Technologien zu erhalten und somit schnell, seinen Platz in der Informatik zu finden.

WAS bietet mir eine Studierendengruppe?
Schon lange sind die Zeiten des Einzelkämpfers gezählt. In keinem anderen Bereich ist es so notwendig, in einem gut funktionierenden Team gemeinsam ein Ziel zu erreichen, wie in der Informatik. Dabei muss man sich stets auf neue Charaktere, Probleme und Aufgaben einstellen. Je mehr Erfahrungen man bereits im Vorfeld sammelt, desto einfacher fällt es einem sich im späteren Berufsleben auf die ständig neuen Situationen einzustellen.
In einer Studierendengruppe lernt man genau dies: Projekte mit anderen zusammen planen, organisieren und durchführen.

Durch die vielen Verbindungen der Gesellschaft für Informatik e. V., aber auch die, die Ihr selbst oder durch Eure Hochschule knüpft, bildet Ihr Euch ein großes Netzwerk, welches unerlässlich ist. Durch dieses großes Netzwerk habt Ihr die Möglichkeit, Kontakte in den Beruf des Informatikers und damit auch zu Firmen aus den verschiedensten Bereichen der Informatik zu knüpfen:
- für Praktika, Abschlussarbeiten oder den Einstieg nach dem Studium,
- Firmenbesichtigungen,
- Exklusive Vorträge,
- Individuelle Seminare.

Ihr könnt aber auch jede andere Idee, umsetzen, die Euch und Eure Kommilitonen interessiert. Dabei sollte auch nie die soziale Komponente untergehen (z. B. Semester-Grillen)! Denn es soll Spaß machen!

www.wir-sind-informatik.de

Veranstalter: Universität Trier und Fachhochschule Trier

Grundtechniken

- Greedy-Verfahren
- Partitionsprobleme
- Lokale Suche
- Lineares Programmieren
- Dynamisches Programmieren

Allgemeines zu Greedy-Verfahren

hier speziell bei Maximierungsverfahren

Allgemeine Aufgabe: Aus einer Grundmenge X ist eine maximale zulässige Lösung S_{max} zu finden.
Voraussetzung: Die Menge der zulässigen Lösungen ist monoton, d.h., falls S zulässige Lösung ist, so auch $S' \subseteq S$ für alle $S' \subseteq S$.
Damit ist auch $\emptyset$ eine zulässige (Ausgangs-)Lösung.
X sei nach einem geeigneten Kriterium sortiert.
Allgemeine Vorgehensweise:
Für jedes Element x der Liste X wird für die bislang gefundene zulässige Lösung S' geprüft, ob $S' \cup \{x\}$ ebenfalls zulässig ist.
Wenn ja, wird $S' := S' \cup \{x\}$ gebildet.
Daher werden stets nur zulässige Lösungen ausgegeben.
Außerdem ist klar, dass eine so gefundene zulässige Lösung S' nicht mehr durch Hinzunahme eines weiteren Elements $x \notin S'$ erweitert werden kann, denn wenn $\{x\} \cup S'$ zulässig wäre, dann auch $\{x\} \cup S''$ für alle $S'' \subseteq S'$ (Monotonie!);
speziell gälte dies für ein S'', das als „bisherige Lösung“ an dem Punkt, als x untersucht wurde, gebildet worden war.

Allgemeines zu Greedy-Verfahren

hier speziell bei MAXCLIQUE

Allgemeine Aufgabe: Aus der Knotenmenge $X = V$ von G ist eine maximale zulässige Lösung C_{max} zu finden.
HIER: C zulässig gdw. C ist Clique.

Voraussetzung: Die Menge der zulässigen Lösungen ist monoton, d.h., falls S zulässige Lösung ist, so auch $S' \subseteq S$ für alle $S' \subseteq S$.

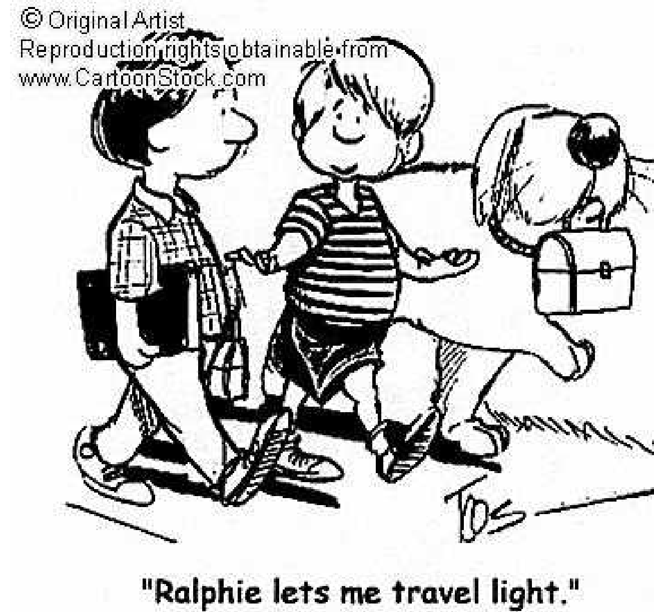
HIER: Jede Teilmenge einer Clique bildet eine Clique.
Damit ist auch $\emptyset$ eine zulässige (Ausgangs-)Lösung.
X sei nach einem geeigneten Kriterium sortiert (Beispiel: absteigender Grad).

Allgemeine Vorgehensweise:
Für jedes Element x der Liste X wird für die bislang gefundene zulässige Lösung S' geprüft, ob $S' \cup \{x\}$ ebenfalls zulässig ist.
Wenn ja, wird $S' := S' \cup \{x\}$ gebildet.
Daher werden stets nur zulässige Lösungen ausgegeben.

Maximum Knapsack (Rucksackproblem)

I:	endliche Menge X	bzw. „Liste“ $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
	Profitfunktion $p : X \to \mathbb{N}$	bzw. „Liste“ $\{p_1, \ldots, p_n\}$
	Größenfunktion $a : X \to \mathbb{N}$	bzw. „Liste“ $\{a_1, \ldots a_n\}$
	Fassungsvermögen $b \in \mathbb{N}$ des Rucksacks	
	[O.E.: $\forall 1 \leq i \leq n : a_i \leq b$ im Folgenden]	
S:	$\{Y \subseteq X \mid s(Y) = \sum_{x_i \in Y} a_i \leq b\}$	
m:	$p(Y) = \sum_{x_i \in Y} p_i$	
opt.:	max	

Mitteilung: Knapsack ist NP-vollständig.



Heuristische Idee: Es ist günstig, möglichst solche Sachen x_i in den Rucksack zu tun, die möglichst viel Profit versprechen im Verhältnis zum benötigten Platz.
$\rightsquigarrow$ GreedyKnapsack (X, p, a, b)

1. Sortiere X absteigend nach dem Verhältnis $\frac{p_i}{a_i}$
   ($\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei die erhaltene sortierte Grundmenge)

2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)

3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.

4. Liefere Y zurück.

GreedyKnapsack kann **beliebig schlechte Ergebnisse** liefern, wie folgendes Beispiel lehrt:

$p : \{p_1 = 1, \ldots, p_{n-1} = 1, p_n = b - 1\}$
$a : \{a_1 = 1, \ldots, a_{n-1} = 1, a_n = b = k \cdot n\}$ für ein beliebig großes $k \in \mathbb{N}$

Hier ist für $x = (X, p, a, b) : m^*(x) = b - 1 = k \cdot n - 1 > kn - k = k(n-1)$ (durch Wahl des letzten Elements), aber GreedyKnapsack liefert, da

$$\frac{p_1}{a_1} = 1 = \ldots = \frac{p_{n-1}}{a_{n-1}} > \frac{p_n}{a_n} = \frac{b-1}{b}$$

$$m_{Greedy}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i = n - 1, \text{ d.h. } \frac{m^*(x)}{m_{Greedy}(x)} > k$$

Andere heuristische Idee fürs Rucksackfüllen:
X absteigend nach dem Profit sortieren. $\rightsquigarrow$ GreedyKnapsack'(X, p, a, b)

1. Sortiere X absteigend nach dem Profit p_i.
   ($\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei die erhaltene sortierte Grundmenge)

2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)

3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.

4. Liefere Y zurück.

Nahezu dasselbe Beispiel wie eben (nur mit $a_n = \frac{n}{k}$) lehrt: beliebig schlechte Lösungen möglich !

Erstaunlich: Kombinationsalgorithmus mit Gütegarantie

$\rightsquigarrow$ GreedyKnapsackKombi(X, p, a, b)

1. $Y_1 :=$ GreedyKnapsack (X, p, a, b)
2. $Y_2 :=$ GreedyKnapsack'(X, p, a, b)
3. Wenn $p(Y_1) \geq p(Y_2)$, dann liefere Y_1, sonst liefere Y_2.

Eine andere (vereinfachte) Kombination lautet: GreedyKnapsack$''(X, p, a, b)$

1. Sortiere X absteigend nach Verhältnis $\frac{p_i}{a_i}$ ($\{x_1, \ldots, x_n\}$: sortierte Grundmenge)
2. $Y := \emptyset$ (die leere Menge ist zulässig)
3. Für $i := 1$ bis n tue
   wenn $a_i \leq b$, dann $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$.
4. " Suche x_{max} mit $\forall i : p_i \leq p_{max}$ (maximaler Profit!)
5. " Wenn $p(Y) \geq p_{max}$ dann liefere Y sonst liefere $\{x_{max}\}$.

Lemma: Für alle Instanzen x gilt:

$$m_{\mathtt{GreedyKnapsack}''}(x) \leq m_{\mathtt{GreedyKnapsackKombi}}(x)$$

Damit überträgt man die im folgenden Satz gezeigte Gütegarantie von Greedy-Knapsack” auf GreedyKnapsackKombi.
Abkürzend schreiben wir:
$m_G, m_{G''}$ für $m_{\mathtt{GreedyKnapsack}}$ bzw. $m_{\mathtt{GreedyKnapsack}''}$.

Satz 1: Ist x eine MaximumKnapsack-Instanz, so ist

$$\frac{m^*(x)}{m_{G''}(x)} < 2.$$

Beweis: Es sei j der Index des ersten Elements, welches der Greedy-Algorithmus GreedyKnapsack *nicht* in den Rucksack tut.
Es gilt:

$$\overline{p_j} := \sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x) \leq m_{G''}(x).$$

Ferner setzen wir:

$$\overline{a_j} := \sum_{i=1}^{j-1} a_i \leq b.$$

Behauptung: $m^*(x) < \overline{p_j} + p_j$.

Aus der Behauptung folgt die Aussage des Satzes, denn:

- Gilt $p_j \leq \overline{p_j}$, so ist $m^*(x) < 2\overline{p_j} \leq 2m_G(x) \leq 2m_{G''}(x)$.
- Gilt $p_j > \overline{p_j}$, so ist $m^*(x) < 2p_j \leq 2p_{max} \leq 2m_{G''}(x)$.

Warum gilt die Behauptung?

Betrachte (kurzfristig) die folgende Verallgemeinerung des Rucksackproblems: Es sei nun erlaubt, „Bruchstücke“ der x_i (mit entsprechend der Größe skaliertem Gewinn) in den Rucksack zu tun. Der Wert einer optimalen Lösung für das neue Problem ist sicher eine obere Schranke für $m^*(x)$. Wie man leicht einsieht, ist

$$\overline{p_j} + (b - \overline{a_j}) \cdot \frac{p_j}{a_j}$$

der maximale Wert einer Lösung des variierten Problems, wenn die x_i nach $\frac{p_i}{a_i}$ absteigend sortiert vorliegen und j wie oben definiert ist.

$$\Rightarrow \quad m^*(x) \leq \overline{p_j} + \underbrace{(b - \overline{a_j})}_{<a_j} \cdot \frac{p_j}{a_j} < \overline{p_j} + p_j.$$

Tatsächlich liefert der Beweis zu Satz 1, dass der folgende (noch einfachere) Algorithmus eine $\frac{1}{2}$-Approximation von Maximum Knapsack ist:

1. Sortiere X absteigend nach $\frac{p_i}{a_i}$.

2. $Y := \emptyset$; $i := 1$;

3. Solange $i \leq n$ und $a_i \leq b$, tue
   $Y := Y \cup \{x_i\}$; $b := b - a_i$; $i := i + 1$.

4. Wenn $a_i \leq b$, dann liefere Y,
   sonst, wenn $p_i \leq p(Y)$, dann liefere Y,
   sonst liefere $\{x_i\}$.

Hinweise: (1) Verallgemeinerung von Problemen, spezieller Relaxation des Zahlbereichs, ist oft ein Ansatz, um Schranken für Approximationsgüte zu gewinnen.
(2) Es gibt ein eigenes Buch zu diesem Thema: S. Martello, P. Toth: Knapsack Problems; Algorithms and Computer Implementations, Wiley, 1990.

Hinweise

Greedy-Verfahren können unter gewissen Voraussetzungen auch garantiert optimale Lösungen (für PO-Probleme) liefern.

Ein Beispiel hierfür ist die Berechnung eines Spannbaums mit kleinstem Kantengewicht.

Näheres hierzu im Speziellen in Algorithmen-Vorlesungen von Prof. Näher.

Die Theoretische Informatik liefert *Matroide* als Grundgerüst.

Näheres hierzu in der Bachelor-Veranstaltung GTI-3.