# Näherungsalgorithmen

# (Approximationsalgorithmen)

## WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

20. Dezember 2012

# **Näherungsalgorithmen** Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung / Motivation
- Grundtechniken für Näherungsalgorithmen
- Approximationsklassen (Approximationstheorie)

## Approximationstheorie

- Absolute Approximation
- Relative Approximation: die Klasse APX
- Polynomzeit-Approximationsschemata PTAS
- Zwischen APX und NPO
- Zwischen PTAS und APX
- Approximationsklassen und Reduktionen

## Ein PTAS für
## Maximum Independent Set auf planaren Graphen

## Außerplanarität

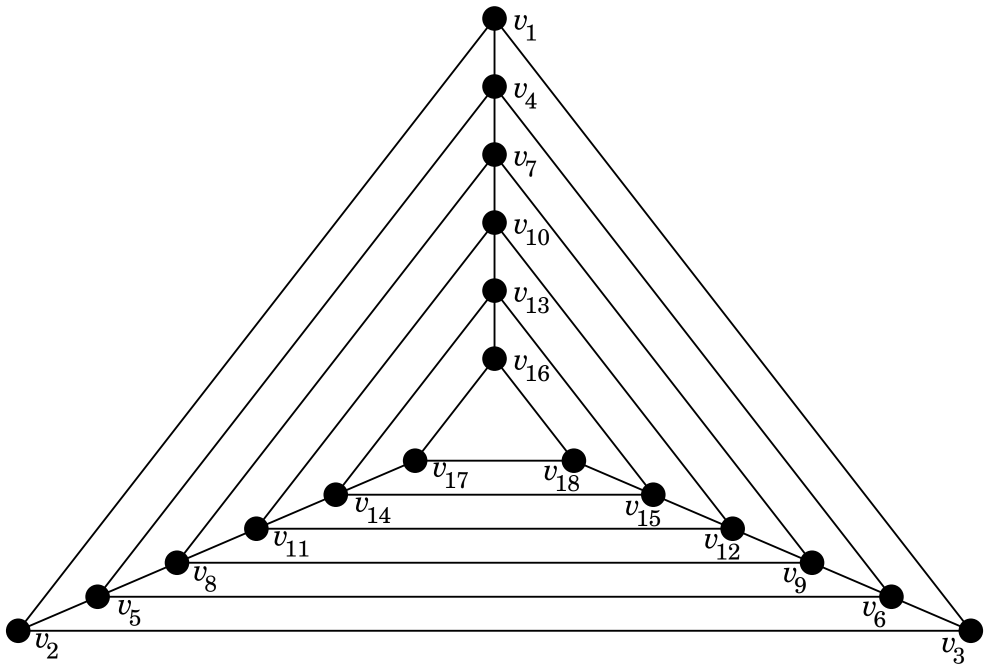
Es sei eine planare Einbettung (also eine „Zeichnung“ in der Ebene) eines planaren Graphen $G$ gegeben. Die *Schicht* eines Knotens von $G$ ist induktiv wie folgt bestimmt:

1. Alle Knoten, die an die äußere Fläche grenzen, gehören zur Schicht 1.

2. Für jedes $i > 1$ seien die Knoten der Schicht $1, \ldots, i-1$ bekannt; wir entfernen diese (in Gedanken) aus dem eingebetteten Graphen. Alle Knoten, die nun an die äußere Fläche grenzen, gehören zur Schicht $i$.

Die Anzahl der Schichten eine eingebetteten Graphen heißt auch seine *Außerplanarität*.

# Ein Beispiel



B. S. Baker konnte zeigen:

**Mitteilung** Ist $K$ die Außerplanarität eines eingebetteten Graphen $G$ mit $n$ Knoten, so kann eine größtmögliche unabhängige Menge für $G$ in Zeit $O(8^K \cdot n)$ bestimmt werden.

Dieses Resultat verwendete sie, um ein PTAS für MIS (auf planaren Graphen) anzugeben, welches wir jetzt vorstellen.

Satz: MIS (auf planaren Graphen) $\in$ PTAS.

MIS-PTAS $(G = (V, E), r)$

1. Setze $K := \lceil 1/(r-1) \rceil$.
2. Bestimme eine planare Einbettung von $G$.
3. Berechne die Knotenschichten.
   (Sei $V_i$ die Menge der Knoten auf Schicht $i$.)
4. Für $i = 0$ bis $K$ tue

   4a. Sei $\overline{V_i}$ die Vereinigung aller $V_j$ mit $j \equiv i \mod K+1$

   4b. $G_i := G(V \setminus \overline{V_i})$
   ($G_i$ hat Außerplanarität $K$)

   4c. Berechne größtmögliche unabhängige Mengen $I_i$ von $G_i$.
5. Sei $I_m (m = 0, \ldots, K)$ derart, dass $|I_m| = \max\{|I_i| \mid 0 \leq i \leq K\}$.
6. Liefere $I_m$ zurück.

**Beweis:** $r > 1$: die angestrebte Approximationsgüte
Setze $K := \left\lceil \frac{1}{r-1} \right\rceil$.
Sei ein eingebetteter Graph $G$ gegeben.
Wähle $V_i, \overline{V_i}, G_i$ wie im Programm.
Nach Konstruktion (jede $K+1$ Schicht ist entfernt worden!) ist jedes $G_i$ $K$-außerplanar.
Eine größtmögliche unabhängige Menge $I_i$ von $G_i$ kann in Zeit $O(8^K \cdot n)$ gefunden werden.
Es sei $I_m$ eine Menge größtmöglicher Mächtigkeit unter den $I_0, \ldots, I_K$.
Bezeichne nun $I^*$ eine größtmögliche unabhängige Menge von $G$.
Es gibt dann ein $r$, $0 \leq r \leq K$, mit $\left|\overline{V_r} \cap I^*\right| \leq |I^*|/(K+1)$.
Da $I_r$ eine größtmögliche unabhängige Menge auf $G_r$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} |I_r| &\geq |V \setminus \overline{V_r} \cap I^*| \\ &= |I^* \setminus (\overline{V_r} \cap I^*)| \\ &\geq |I^*| - \frac{|I^*|}{K+1} \\ &= \frac{K}{K+1}|I^*| \end{aligned}$$

Also ist

$$|I_m| \geq |I_r| \geq \frac{K}{K+1}|I^*|$$

Daraus folgt:

$$R(G, I_m) = \frac{I^*}{I_m} \leq \frac{K+1}{K} \leq r.$$

□

## Das Kreisscheibenüberdeckungsproblem (Disc Cover)

(D. S. Hochbaum und W. Maas für Überdeckungs- und Packungsprobleme in so genannten geometrischen Graphen).

$I =$ $\{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (, D)
$S:$ $\{\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_K\} \mid \bigcup_{i=1}^{K} D_i \supseteq I\}$
$D_i$ Kreisscheibe vom Durchmesser D.
$m:$ $K = |\mathcal{D}|$
opt : min.

**Vereinbarungen:**

Annahme: Die Punkte aus $I$ liegen alle in einem Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$.
Es sei $l$ der so genannte *Verschiebeparameter* (s.u.)
In einer ersten Phase unterteilen wir $R$ in vertikale Streifen der Breite $D$; jeder Streifen sei links offen und rechts abgeschlossen.
*Makrostreifen* der Breite $l \cdot D$: Gruppen von $l$ aufeinander folgenden Streifen (evtl. schmalere „Randstreifen“).
Offenbar lässt sich $R$ in $l$ verschiedene Weisen in Makrostreifen unterteilen; $M_1, \ldots, M_l$ seien die entspr. Makrostreifenmengen.
Es sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der eine zulässige Lösung für Streifen der Maximalbreite $l \cdot D$ berechnet.
Für eine Makrostreifenmenge $M_i$ sei $\mathcal{A}(M_i)$ der Algorithmus, der $\mathcal{A}$ auf jeden Makrostreifen aus $M_i$ anwendet und die Vereinigung der so erhaltenen Kreisscheibenmengen als Lösung liefert; diese ist sicherlich zulässig.

Der **Verschiebealgorithmus** $S_{\mathcal{A}}$ liefert nun eine solche Lösung, die minimal unter den Lösungen von $\mathcal{A}(M_1), \ldots, \mathcal{A}(M_l)$ ist.
$r_{\mathcal{A}}$ und $r_{S_{\mathcal{A}}}$ seien die Leistungsgüten (performance ratios) von $\mathcal{A}$ und $S_{\mathcal{A}}$. Dann gilt:

**Das Verschiebelemma:**

$$r_{S_{\mathcal{A}}} \leq r_{\mathcal{A}} \left(1 + \frac{1}{l}\right).$$

Beweis: Per Definition ist

$$m_{\mathcal{A}(M_i)} = \sum_{J \in M_i} m_{\mathcal{A}}(J) \leq r_{\mathcal{A}} \cdot \sum_{J \in M_i} m^*(J).$$

Dabei $m_{\mathcal{A}}(J)$ bzw. $m^*(J)$ der von Algorithmus $\mathcal{A}$ bzw. einem optimalen Algorithmus gelieferte Wert, angewendet auf die durch den Makrostreifen $J$ gegebene Subinstanz.
Es sei $S^*$ eine optimale Lösung des Ausgangsproblems vom Wert $m^*$.
Es sei $S^*[i] \subseteq S^*$ diejenige Menge von Kreisscheiben, die Punkte von $I$ aus zwei angrenzenden Makrostreifen von $M_i$ abdeckt.
Offenbar gilt:

$$\forall i, j : S^*[i] \cap S^*[j] \neq \emptyset \to i = j \qquad [+]$$

Da $m^*(J)$ der optimale Wert für Streifen $J$ ist, gilt:

$$m^*(J) \leq |\{D \in S^* \mid D \cap J \neq \emptyset\}|$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \sum_{J \in M_i} m^*(J) &\leq \sum_{J \in M_i} |\{D \in S^* \mid D \cap J \neq \emptyset\}| \\ &= |S^*| + |S^*[i]|\,, \end{aligned}$$

denn (nur) die Scheiben aus $S^*[i]$ sind doppelt zu zählen. Da das Minimum durch das arithmetische Mittel majorisiert wird, gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
m_{S_{\mathcal{A}}} &= \min_{i=1,\dots,l} m_{\mathcal{A}(M_i)} \leq \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} m_{\mathcal{A}(M_i)} \\
&\leq \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} r_{\mathcal{A}} \cdot \sum_{J \in M_i} m^*(J) \\
&\leq \frac{r_{\mathcal{A}}}{l} \sum_{i=1}^{l} (|S^*| + |S^*[i]|) \\
&= \frac{r_{\mathcal{A}}}{l} \left( l \cdot m^* + \sum_{i=1}^{l} |S^*[i]| \right) \\
&\leq \frac{r_{\mathcal{A}}}{l} (l+1) m^*
\end{aligned}$$

$\square$

Satz: Das Kreisscheibenüberdeckungsproblem liegt in PTAS.

Beweis: Durch zweimaliges (geschachteltes) Anwenden des Verschiebelemmas, wobei einmal das Ausgangsrechteck in vertikale und das andere Mal in horizontale Streifen unterteilt wird, erhalten wir einen Algorithmus $\mathcal{B}$ mit

$$r_{\mathcal{B}} \leq r_{\square} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^2 .$$

$r_{\square}$ sei dabei die Leistungsgüte eines Algorithmus für eine quadratische Fläche der größtmöglichen Seitenlänge $l \cdot D$.

Wir zeigen nun: $r_{\square} = 1$ für einen Algorithmus, der (lediglich) exponentiell in $l$ ist.

Damit ist die Behauptung gezeigt, denn für vorliegende Leistungsgüte $r$ braucht nur ein $l$ mit $\left(1 + \frac{1}{l}\right)^2 \leq r$ bestimmt zu werden.

Betrachte nun ein Quadrat der größtmöglichen Seitenlänge $l \cdot D$, das mit Kreisscheiben vom Durchmesser $D$ abzudecken ist.
Klar ist, dass man höchstens $O(l^2)$ viele Scheiben benötigt, um das vorliegende Quadrat lückenlos abzudecken. $[+]$
Es sei im Weiteren $\tilde{n}$ die Anzahl der (ursprünglich) vorgegebenen $n$ Punkte, die im betrachteten Quadrat liegen.
Es sei $x$ einer dieser Punkte. Wird $x$ (in einer opt. Überdeckung) von einer Scheibe abgedeckt, die keinen anderen Punkt abdeckt, so ist die exakte Position dieser Scheibe gleichgültig.
Andernfalls gibt es noch andere Punkte, die von derselben Kreisscheibe abgedeckt werden. O.E. können wir annehmen, zwei dieser Punkte liegen auf dem Rand der Scheibe.
Da durch jene zwei Punkte nur zwei verschiedene Kreise gezogen werden können, die diese Punkte auf dem Rand liegen haben, gibt es insgesamt höchstens $2 \cdot \binom{\tilde{n}}{2} = O(\tilde{n}^2)$ viele Kreisscheibenpositionen zu berücksichtigen.
Wegen $[+]$ sind an diesen Positionen (höchstens) $O(l^2)$ viele auszuwählen, so dass insgesamt maximal $O(\tilde{n}^{p(l)})$ viele Kreisscheibenanordnungen durchzutesten sind für ein Polynom $p$. $\square$

## Zum Zusammenhang mit der Konstruktion von Baker

Ist $\mathcal{D}$ eine Menge von Kreisscheiben, so ist $\mathcal{D}$ in natürlicher Weise der folgende Graph zugeordnet. $G_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, E_{\mathcal{D}})$ mit $\{D_1, D_2\} \in E$ gdw. $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.
Diese geometrischen Graphen genannt) sind ein naheliegendes Modell für viele reale Probleme.
**Mitteilung** (Satz von Koebe):
Ein geometrischer Graph $G_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, E_{\mathcal{D}})$ ist planar, wenn $\forall \{D_1, D_2\} \in E_{\mathcal{D}} : |D_1 \cap D_2| = 1$.
Jeder planare Graph lässt sich umgekehrt als geometrischer Graph darstellen, dessen Kreisscheiben sich paarweise in einem Punkt treffen (also sich nur berühren).

Speziell kümmern wir uns nun um *Einheitskreisgraphen*, das sind geometrische Graphen mit Kreisscheiben vom Radius 1.

Satz: MIS —eingeschränkt auf Einheitskreisgraphen— liegt in PTAS.

Beweis: (Skizze) Wie in vorigem Satz unterteilt man ein die tangierten Punkte der Ebene einschließendes Rechteck nacheinander in vertikale und horizontale Streifen der Breite $k$. Es ist leicht einzusehen, dass eine unabhängige Menge von Einheitskreisscheiben in einem Quadrat der Seitenlänge $k$ höchstens $O(k^2)$ viele Elemente hat. Dies ermöglicht wiederum, MIS für Quadrate der Seitenlänge $k$ optimal in einer Zeit $O(n^{\text{pol}(k)})$ zu lösen, wobei $n$ die Zahl der gegebenen Kreisscheiben und pol ein Polynom ist.
Indem wir jetzt (für jeden vertikalen Streifen) alle Graphen $G_i$ betrachten, deren Streifen-Zentren in einem der Quadrate $Q_1, \dots, Q_q$ (der Seitenlänge jeweils $\leq k$) liegen für ein $Q_j$ mit $j \neq i \mod (n+1)$, so können wir eine $\frac{k}{k+1}$-Näherung an ein MIS für solch einen Streifen erhalten. □

Literatur:


- B. Baker: Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. In: JACM 41 (1994), 153–180.

- H. B. Hunt, M. V. Marathe, V. Radhakrishnan, S. S. Ravi, D. J. Rosenkrantz, R. E. Stearns: A unified approach to approximation schemes for NP- and PSPACE-hard problems for geometric graphs. In: Algorithms ESA’94, LNCS 855 (1994), 424-435.

- D. S. Hochbaum, W. Maass: Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI. In: JACM 32 (1985), 130-136.

# APX versus PTAS

Ist die triviale Inklusion PTAS $\subseteq$ APX echt?

Satz: Gilt P $\neq$ NP, so PTAS $\subsetneq$ APX.

Beweis: Wir zeigen, dass —voraussgesetzt P $\neq$ NP— kein $r$-approximativer für das vorher als zu APX gehörig gezeigte Bin-Packing-Problem existiert für $r \leq 3/2 - \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$.

Betrachte dazu folgende NP-vollständige Entscheidungsproblemvariante für das soeben behandelte Problem PARTITION.

Ggb: Gegenstände $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit Gewichten $a_i \in \mathbb{N}$
Gefragt: Gibt es eine Bipartition $(Y_1, Y_2)$ von X mit

$$\sum_{x_j \in Y_1} a_j = \sum_{x_j \in Y_2} a_j \qquad ?$$

Wir zeigen, wie man PARTITION in Polynomzeit lösen könnte, wenn es für Bin-Packing eine $r$-Approximation mit $r \leq 3/2 - \epsilon$ gäbe.

Sei also $(X, a)$ eine Instanz von Partition $B := \sum_{x \in X} a(x)$.

Wir definieren nun die „zugehörige" Instanz von Bin-Packing:

Jedem Gegenstand $x_i \in X$ mit Gewicht $a_i$ ordnen wir einen Gegenstand $x'_i$ der Größe $a'_i = \frac{2a_i}{B}$ zu. Dabei können wir $a_i \leq B/2$ voraussetzen, da wir sonst trivialerweise eine unlösbare Instanz von PARTITION vorzuliegen hätten.

$\rightsquigarrow$ Instanz $(X, a')$ von Bin-Packing. Ist nun $(X, a)$ eine positive Instanz von PARTITION, so ist $m^*(X, a') = 2$ für das zugehörige Bin-Packing-Problem. Ist aber $(X, a)$ eine negative Instanz von PARTITION, so wird in jedem Fall ein dritter Behälter für $(X, a')$ benötigt. Daraus ergibt sich die Behauptung, denn die angegebene Reduktion ist Polynomzeit berechenbar. $\square$