Automaten und Formale Sprachen

SoSe 2013 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

2. Juni 2013

Automaten und Formale Sprachen — Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- **Endliche Automaten und reguläre Sprachen**
- Kontextfreie Grammatiken und kontextfreie Sprachen
- Chomsky-Hierarchie

Endliche Automaten und reguläre Sprachen

1. Deterministische endliche Automaten
2. Nichtdeterministische endliche Automaten
3. **Reguläre Ausdrücke**
4. Nichtreguläre Sprachen
5. Algorithmen mit / für endliche Automaten

Eine algebraischere Betrachtungsweise von Sprachoperationen

Erinnerung: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gehört zu **REG** gdw. es ein endliches Monoid $(M, \circ, e)$, einen Monoidmorphismus $h : (\Sigma^*, \cdot, \lambda) \to (M, \circ, e)$ sowie eine endliche Menge $F \subseteq M$ gibt mit

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in F\}.$$

Satz: **REG** ist gegen Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis: Sei $L \subseteq \Sigma^*$ durch ein endliches Monoid $(M, \circ, e)$, einen Monoidmorphismus $h : (\Sigma^*, \cdot, \lambda) \to (M, \circ, e)$ sowie eine endliche Menge $F \subseteq M$ spezifiziert. Dann spezifizieren $(M, \circ, e)$, h und $M \setminus F$ gemeinsam $\Sigma^* \setminus L$. (Beweiseinzelheiten zur Übung.) $\square$

Monoide aus Monoiden I

Es seien $(M, \circ, e)$ und $(N, \square, 1)$ Monoide.
Dann kann man die Menge $M \times N$ zu einem Monoid machen durch *komponentenweises Anwenden* der Operationen; definiere daher:

$$(m, n)\,[\circ, \square](m', n') := (m \circ m', n \square n').$$

Satz: $(M \times N, [\circ, \square], (e, 1))$ ist ein Monoid, das *Produktmonoid*.

Satz: Sind $h_M : (X, \Delta, I) \to (M, \circ, e)$ und $h_N : (X, \Delta, I) \to (N, \square, 1)$ Monoidmorphismen, so auch der *Produktmorphismus*
$h_M \times h_N : X \to M \times N, x \mapsto (h_M(x), h_N(x))$.

Beide Sätze lassen sich auf Produkte endlich vieler Monoide bzw. Morphismen verallgemeinern. In dieser Form werden wir sie im Folgenden benutzen.

Mengenoperationen als Sprachoperationen allgemein

Satz: Ist f eine k-stellige Mengenoperation, so ist **REG** gegen f abgeschlossen.

Beweis: Betrachte k reguläre Sprachen L_i, spezifiziert durch endliche Monoide $(M_i, \circ_i, e_i)$, Morphismen h_i und endliche Mengen $F_i \subseteq M_i$. Dann spezifizieren das Produktmonoid $M_1 \times \cdots \times M_k$, der Morphismus $h_1 \times \cdots \times h_k$ und die endliche Menge $f(F'_1, \ldots, F'_k)$ die Sprache $f(L_1, \ldots, L_k)$; hierbei sei $F'_i = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid (\forall 1 \leq j \leq k : x_j \in M_j) \wedge x_i \in F_i\}$. Mithin ist $f(L_1, \ldots, L_k)$ regulär. □

Ist speziell f der Durchschnitt, so gilt: $F'_1 \cap F'_2 = F_1 \times F_2$.
Schauen wir uns für diesen Fall beweistechnische Einzelheiten an:

$L_i = \{w \in \Sigma^* \mid h_i(w) \in F_i\}$ für $i = 1, 2$ laut Def.
Für die konstruierte Sprache ist:
$L_\cap = \{w \in \Sigma^* \mid (h_1 \times h_2)(w) \in (F'_1 \times M_2 \cap M_1 \times F'_2)\}$.
Zu zeigen bleibt: $L_\cap = L_1 \cap L_2$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \iff w \in L_1 \wedge w \in L_2 \iff h_1(w) \in F_1 \wedge h_2(w) \in F_2$$
$$\iff (h_1(w), h_2(w)) \in F_1 \times F_2 \iff (h_1 \times h_2)(w) \in (F'_1 \times M_2 \cap M_1 \times F'_2).$$

Ein Beispiel

Betrachte als endliche Monoide $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}_2, +, 0)$ und $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}_3, +, 0)$. Dann übersetzt der Morphismus ϕ aus $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ in das Monoid $\mathcal{M}_3 = (\mathbb{Z}_6, +, 0)$ gemäß: $(0,0) \mapsto 0$, $(0,1) \mapsto 4$, $(0,2) \mapsto 2$, $(1,0) \mapsto 3$, $(1,1) \mapsto 1$, $(1,2) \mapsto 5$.

$\mathcal{M}_1$, ℓ_2 und $\{0\}$ beschreiben die Wörter L_1 gerader Länge.
$\mathcal{M}_2$, ℓ_3 und $\{1,2\}$ beschreiben die Wörter L_2, deren Länge beim Teilen durch drei nicht den Rest 0 lässt.
$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, $\ell_2 \times \ell_3$ und

$$F = \{(0,0),(0,1),(0,2)\} \cap \{(0,1),(1,1),(0,2),(1,2)\} = \{(0,1),(0,2)\} = \{0\} \times \{1,2\}$$

beschreiben die Wörter, deren Länge gerade ist und beim Teilen durch drei den Rest 1 oder 2 lässt.
Gleichwertig lässt sich $L_1 \cap L_2$ durch das Monoid $\mathcal{M}_3$, ℓ_6 sowie $\phi(F) = \{2,4\}$ darstellen.

Monoide aus Monoiden II

Ist $(M, \circ, e)$ ein Monoid, so kann der Menge 2^M durch das *Komplexprodukt* zu einem Monoid gemacht werden. Dazu definieren wir:

$$A \circ B := \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Das zugehörige neutrale Element ist $\{e\}$.

Beispiel: $(\Sigma^*, \cdot, \lambda)$ ist ein Monoid, und so kann man auch $\cdot$ als Sprachoperation auffassen.

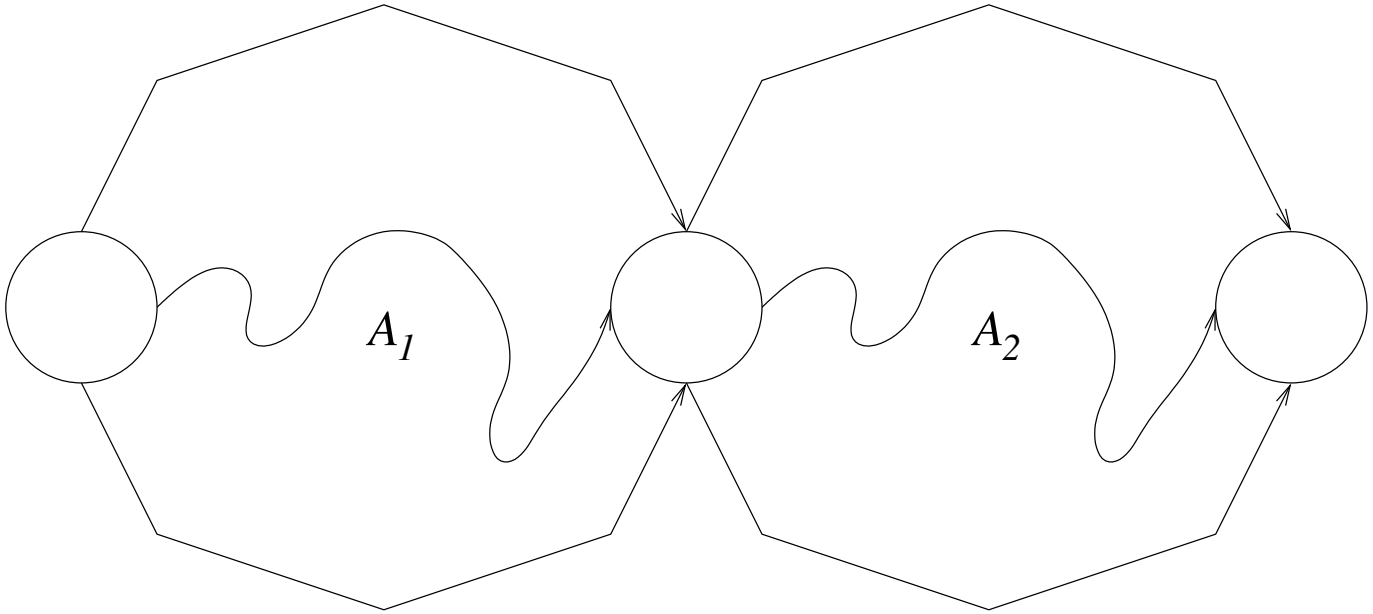
Satz: **REG** ist gegen Konkatenation abgeschlossen.

Beweis: Es seien $L_1, L_2 \in$ **REG**.
Wir können davon ausgehen, dass ein λ-NEA

$$A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_{0,i}, F_i)$$

L_i akzeptiert, der nur einen Anfangs- und einen Endzustand besitzt; der Anfangszustand hat nur ausgehende Kanten und der Endzustand nur eingehende. (Warum gibt es diese Normalform?)
Wir gehen ferner davon aus, dass $Q_1 \cap Q_2 = F_1 = Q_{0,2}$ gilt.
Setze $Q = Q_1 \cup Q_2$ und $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$.
Beh.: $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_{0,1}, F_2)$ akzeptiert $L_1 \cdot L_2$.
$L_1 \cdot L_2 \subseteq L(A)$ ist durch die Konstruktion einzusehen.
$L(A) \subseteq L_1 \cdot L_2$ ist die schwierigere Richtung.
Wichtigen Eigenschaften von A:
— Jeder Pfad von $Q_{0,1}$ nach F_2 führt durch $F_1 = Q_{0,2}$.
— Es gibt keinen Pfad von Q_2 nach $Q_1 \setminus F_1$.
(Einzelheiten zur Übung.) □

REG ist gegen Konkatenation abgeschlossen: Skizze



Potenzen in Monoiden: Der Weg zum Kleene-Stern.

Ist $(M, \circ, e)$ ein Monoid, so können wir rekursiv die n-te *Potenz* eines Elementes $x \in M$ rekursiv festlegen durch:
$x^0 = e$ sowie $x^{n+1} = x^n \circ x$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wie wir gesehen haben, bildet auch $(2^M, \circ, \{e\})$ ein Monoid.
Somit ist auch A^n für $A \subseteq M$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert.
(Leider kollidiert diese Schreibweise mit dem von dem kartesischen Mengenprodukt induzierten Potenz, aber nicht arg. . .)

Dann kann man $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$ definieren und $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.

Somit ist auch L^+ und L^* (*Kleene-Stern*) für $L \subseteq \Sigma^*$ festgelegt.
Satz: L^+ (L^*) ist die (das) durch L bezüglich der Konkatenation erzeugte Halbgruppe (Monoid).

Satz: **REG** ist gegen Kleene-Stern abgeschlossen.

Beweis: Sei $L \in$ **REG** akzeptiert durch einen λ-NEA A, der nur einen Anfangs- und einen Endzustand q_0 und q_f besitzt;

der Anfangszustand habe nur ausgehende Kanten und der Endzustand nur eingehende.

Durch Verschmelzen von q_0 und q_f als neuer Anfangs- und Endzustand q_{0f} erhalten wir einen NEA A' mit $L(A') = L^*$.

Betrachte $w \in L(A')$. Es gibt eine Folge von Zuständen $p_1, \ldots, p_n$ ($n \geq \ell(w)$ und $p_1 = p_n = q_{0f}$), sodass für geeignete Suffixe $w_1 = w, \ldots, w_n = \lambda$ von w gilt: $(p_i, w_i) \vdash_{A'} (p_{i+1}, w_{i+1})$ sowie $w_i = w_{i+1}$ oder $w_i = a w_{i+1}$ für ein Zeichen a, für $i = 1, \ldots, n-1$.

Definiere $J(w) = \{j \mid p_j = q_{0f}\}$. Wir zeigen die Beh. durch Induktion über $|J(w)| \geq 1$.

Für $|J(w)| = 1$ haben wir $w = \lambda$ vorzuliegen, also gilt sowieso $w \in L^*$.

Ist $j > 1$ der erste Index mit $p_j = q_{0f}$, so gilt für $w = u_j w_j$: $u_j \in L(A) = L$. Ferner gibt es für $w_j \in L(A')$ einen durch $p_j, \ldots, p_n$ beschriebenen Akzeptierungsweg mit $|J(w_j)| < |J(w)|$, sodass wir hier die IV anwenden können. Also folgt $w \in L \cdot L^* \subseteq L^*$.

Die Inklusion $L^* \subseteq L(A')$ sieht man leichter anhand der Konstruktion ein. $\square$

Reguläre Ausdrücke (ähnlich `grep`)

Definition durch *strukturelle Induktion*:

- $\emptyset$ und $\mathtt{a}$ sind RA für jedes $a \in \Sigma$.
- Ist R ein RA, so auch $(R)*$.
- Sind R_1 und R_2 RAs, so auch R_1R_2 und $(R_1 \cup R_2)$.

Beispiel: $((\mathtt{b} \cup \mathtt{a}))*\mathtt{aaa}(\mathtt{bb})*$ ist ein RA.

Klammern können weggelassen werden: $*$ bindet stärker als Konkatenation, und jenes wieder stärker als Vereinigung.

Die **durch einen RA beschriebene Sprache** ist ebenfalls induktiv gegeben:

- $L(\emptyset) = \emptyset$; $L(a) = \{a\}$.
- Ist R ein RA, setze $L((R)*) = (L(R))^*$.
- Sind R_1 und R_2 RA, setze
  $L(R_1R_2) = L(R_1) \cdot L(R_2)$ und $L((R_1 \cup R_2)) = L(R_1) \cup L(R_2)$.

Beispiel: $L((b \cup a)*) = \{a, b\}^*$

Beispiele

(1) Beschreibe die Sprache zum Ausdruck $(\mathtt{ab}*)\mathtt{a}$ in Mengennotation.

$$\begin{aligned} L((\mathtt{ab}*)\mathtt{a}) &= L((\mathtt{ab}*)) \cdot L(\mathtt{a}) \\ &= L(\mathtt{a}) \cdot L(\mathtt{b}*) \cdot \{\mathtt{a}\} \\ &= \{\mathtt{a}\} \cdot (L(\mathtt{b}))^* \cdot \{\mathtt{a}\} \\ &= \{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{a}\} \\ &= \{\mathtt{a}\mathtt{b}^n\mathtt{a} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(2) Beschreibe die Sprache zum Ausdruck $(\mathtt{a} * \mathtt{b})*$ in Worten.

Die Menge aller Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, die nicht mit $\mathtt{a}$ enden.

Satz: Jede RA-Sprache ist regulär.

Beweis: (durch strukturelle Induktion)

- Endliche Sprachen sind regulär. (Dies liefert den Induktionsanfang.)
- Reguläre Sprachen sind gegen Kleene-Stern abgeschlossen.
- Reguläre Sprachen sind gegen Vereinigung und Konkatenation abgeschlossen.

Beispiel: $(\mathtt{a} \cup \mathtt{ab})^*$ (siehe Tafel)

Zusammenhang zwischen struktureller und vollständiger Induktion

ergeben sich zumeist durch Einführung geeigneter “Zählvariablen”.
In unserem Fall sei zu RA R die Anzahl der Operationssymbole in R notiert als: $\#_{op}(R)$.
Dies lässt sich auch wiederum strukturell induktiv definieren:

- $\#_{op}(\emptyset) = 0$ und $\#_{op}(a) = 0$ für jedes $a \in \Sigma$.
- Ist R ein RA, so gilt: $\#_{op}((R)*) = \#_{op}(R) + 1$.
- Sind R_1 und R_2 RAs, so gilt:
  $\#_{op}(R_1R_2) = \#_{op}((R_1 \cup R_2)) = \#_{op}(R_1) + \#_{op}(R_2) + 1$.

Zusammenhang zwischen struktureller und vollständiger Induktion

Die Beweisskizze lässt sich als Beweis durch vollständige Induktion nach $\#_{op}(R)$ begreifen.

IA: Für $\#_{op}(R) = 0$ gilt: $R = \emptyset$ oder $R = a$ für ein $a \in \Sigma$.
Die entsprechenden Sprachen $\emptyset$ bzw. $\{a\}$ sind regulär.

IV: Jeder RA mit höchstens n Operationssymbolen beschreibt eine reguläre Sprache.
Betrachte einen RA R mit $n + 1$ Operationssymbolen.
Hierfür sind drei Fälle möglich:
(a) $R = (R_1)*$; (b) $R = R_1R_2$; (c) $R = (R_1 \cup R_2)$.
In jedem Fall gilt: $\#_{op}(R_1) \leq n$ sowie $\#_{op}(R_2) \leq n$ (falls sinnvoll).
Also sind nach IV $L(R_1)$ und $L(R_2)$ regulär.
Da die regulären Sprachen gegen Kleene Stern, Konkatenation und Vereinigung abgeschlossen sind, ist (in jedem Fall) auch $L(R)$ regulär. □

Satz: Jede reguläre Sprache ist durch einen RA beschreibbar.

Beweis: Betrachte DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $Q = \{1, \ldots, n\}$ und $q_0 = 1$.

$R[i, j, k]$ RA für die Sprache, die von A akzeptiert wird, indem (1) A in Zustand i anfängt, (2) in Zustand j aufhört, und (3) zwischendurch nur Zustände aus $\{1, \ldots, k\}$ erreicht.

Hinweis: Warshall/Floyd

Offenbar gilt: $L(A) = \bigcup_{j \in F} L(R[1, j, n]) = L(\bigcup_{j \in F} R[1, j, n])$.

$R[i, j, 0] = x_1 \cup \cdots \cup x_\ell$, wobei die x_l alle Beschriftungen von Kanten zwischen i und j auflisten (zusätzlich $\emptyset*$ falls $i = j$)

Für $k > 0$ setze rekursiv $R[i, j, k] = R[i, j, k-1] \cup R[i, k, k-1] R[k, k, k-1]* R[k, j, k-1]$.

Daraus ergibt sich ein Algorithmus durch **dynamisches Programmieren**.

$R[1..n, 1..n, 0..n]$ ist 3-dim. Array mit regulären Ausdrücken als Einträgen.

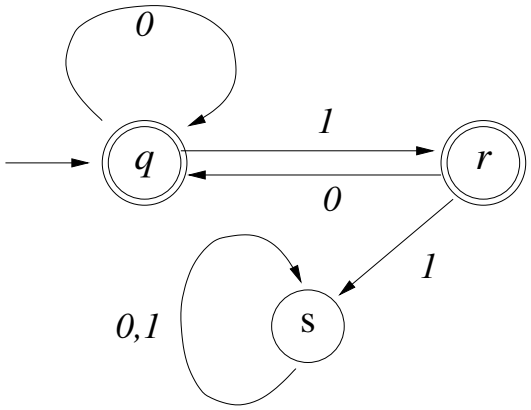
Für $i := 1$ bis n tue:
    Für $j := 1$ bis n tue:
        $R[i, j, 0] := \bigcup_{a \in \Sigma} a$
        Falls $i = j$, so setze $R[i, j, 0] := R[i, j, 0] \cup \emptyset*$.

Für $k := 1$ bis n tue:
    Für $i := 1$ bis n tue:
        Für $j := 1$ bis n tue:
            $R[i, j, k] := R[i, j, k-1] \cup R[i, k, k-1] R[k, k, k-1]* R[k, j, k-1]$.

Damit klar: kubische Komplexität, i.Z.: $O(n^3)$.

Ein Beispiel

(roter Zustand kann weggelassen werden, da er nicht zur Sprache beiträgt)



$R[i,j,0]$	q	r	s
q	$0 \cup \emptyset*$	1	$\emptyset$
r	0	$\emptyset*$	1
s	$\emptyset$	$\emptyset$	$0 \cup 1 \cup \emptyset*$

Ein Beispiel (Forts.)

$R[i,j,0]$	q	r	s
q	$0 \cup \emptyset*$	1	$\emptyset$
r	0	$\emptyset*$	1
s	$\emptyset$	$\emptyset$	$0 \cup 1 \cup \emptyset*$

$R[i,j,\{q\}]$	q	r
q	$0 \cup \emptyset* \cup ((0 \cup \emptyset*)(0 \cup \emptyset*) * (0 \cup \emptyset*)) = 0*$	$1 \cup ((0 \cup \emptyset*)(0 \cup \emptyset*) * 1) = 0 * 1$
r	$0 \cup (0(0 \cup \emptyset*) * (0 \cup \emptyset*)) = 00*$	$\emptyset * \cup (0(0 \cup \emptyset*) * 1) = 00 * 1 \cup \emptyset*$

$R[i,j,\{q,r\}]$	q	r
q	$0 * \cup (0 * 1(00 * 1) * 00*)$	$0 * 1 \cup (0 * 1(00 * 1) * 00 * 1) = 0 * 1(00 * 1)*$
r	...	...

$$L(A) = L(0 * \cup (0 * 1(00 * 1) * 0*)).$$

Hinweis: Explosion EA / RA in beiden Richtungen !

Ein alternatives Verfahren (siehe Kinber/Smith)

arbeitet direkt auf dem evtl. nichtdeterministischen Automatengraphen.

Wichtige Konventionen:

Zustandsmenge $\mathrm{Q} = \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ mit

1: Anfangszustand und

n (einziger) Endzustand.

Kantenbeschriftungen dürfen hierbei reguläre Ausdrücke sein.

(Tatsächlich kann man auch derartige Automaten betrachten.)

Hilfsroutinen:

- `mergearcs`(i, j): Sind $\ell^1_{i,j}$, $\ldots \ell^m_{i,j}$ die Beschriftungen sämtlicher Kanten von i nach j im Automatengraphen, so ersetze diese m Kanten durch eine mit $(\ell^1_{i,j} \cup \ldots \cup \ell^m_{i,j})$ beschriftete.

- `shortcut`$(i, j; k)$: Falls es nur genau eine Kante von i nach k und genau eine Kante von k nach j gibt, tue:

  1. Gibt es genau eine Kante von k nach k mit Beschriftung $\ell_{k,k}$, so tue:
     Ersetze einzige Kante von i nach k mit Beschriftung $\ell_{i,k}$ und einzige Kante von k nach j mit Beschriftung $\ell_{k,j}$ durch neue Kante von i nach j mit Beschriftung $\ell_{i,k}(\ell_{k,k}) * \ell_{k,j}$.

  2. Andernfalls: Ersetze einzige Kante von i nach k mit Beschriftung $\ell_{i,k}$ und einzige Kante von k nach j mit Beschriftung $\ell_{k,j}$ durch neue Kante von i nach j mit Beschriftung $\ell_{i,k}\ell_{k,j}$.

- `remove`(k): Lösche Knoten k und alle mit k inzidenten Kanten.

Der zweite Algorithmus zur Erzeugung äquivalenter RAs

Für $i := 1$ bis n tue:
    Für $j := 1$ bis n tue:
        $\texttt{mergearcs}(i, j)$
Für $k := 2$ bis $n - 1$ tue:
    Für $i := 1$ bis n tue:
        Für $j := 1$ bis n tue:
            $\texttt{shortcut}(i, j; k)$;
            $\texttt{mergearcs}(i, j)$;
            $\texttt{remove}(k)$.

Der gewünschte reguläre Ausdruck findet sich am Schluss als Kantenbeschriftung von der (einzigen) Kante von Knoten 1 nach Knoten n. Sollte keine solche Kante existieren, so ist die Sprache leer und kann durch $\emptyset$ beschrieben werden.

Vorheriges Beispiel an der Tafel !