Rekursions- und Lerntheorie

WiSe 2010/11; Univ. Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Rekursions- und Lerntheorie Gesamtübersicht

1. Einführung: Grundsätzliche Betrachtungen

2. Berechenbarkeitstheorie: Die Churchsche These (4 VL)

3. Ausblicke auf weitere Ergebnisse der Rekursionstheorie

4. Lerntheorie: Modelle und Aussagen

Lernstrategien

Hierunter wollen wir keine konkreten Algorithmen verstehen, sondern eher Klassen von Verfahren, welche i.d.R. gewissen Einschränkungen genügen.
Folgende Arten von Einschränkungen werden üblicherweise betrachtet:

- Einschränkungen möglicher Hypothesen
- Einschränkungen der Benutzung von Informationen
- eingeschränkte Arten der Konvergenz
- Einschränkungen hinsichtlich des Verhältnisses von geäußerten Hypothesen zueinander

Einschränkungen möglicher Hypothesen

Wir betrachten drei mögliche solche Einschränkungen:

all-def Totalität

consistent Konsistenz

prudent Verständigkeit (prudence)

Abgeleitete Lernklassen

Ist P eine der genannten Eigenschaften, so werden zu $\mathbf{TxtEx}$ üblicherweise zwei (i.allg.) verschiedene Teilklassen gebildet:

$[\mathbf{TxtEx}]^P$: beinhaltet Sprachfamilien $\mathcal{L}$, die von einem Forscher M identifiziert werden können, der für alle $\sigma \in SEQ$ die Eigenschaft P besitzt.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class}-P}$: wie soeben, nur dass M nur auf solchen $\sigma \in SEQ$ die Eigenschaft P besitzen muss, für die es eine Sprache $L \in \mathcal{L}$ (mit $\mathcal{L} \in [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class}-P}$) gibt, sodass $Inh(\sigma) \subseteq L$.

Totalität

Ein Lerner M heißt *überall definiert auf* L, falls $M(\sigma)\downarrow$ für jedes $\sigma \in \mathcal{SEQ}$ mit $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$.
M ist überall definiert auf $\mathcal{L}$, falls M überall def. ist auf jedem $L \in \mathcal{L}$.
M ist überall definiert, falls M überall def. ist auf $\mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{all-def}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen überall def. $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-all-def}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen überall auf $\mathcal{L}$ def. $M\}$
Satz 3 aus VL 10 $\rightsquigarrow$
Folgerung: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{all-def}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-all-def}} = \mathbf{TxtEx}$.

Konsistenz

Ein Lerner M heißt *konsistent auf* L, falls für alle $\sigma \in \mathcal{SEQ}$ mit $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$ gilt: $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L(M(\sigma))$.

M ist konsistent auf $\mathcal{L}$, falls M konsistent auf jedem $L \in \mathcal{L}$ ist.

M ist konsistent, falls M konsistent auf $\mathcal{E}$ ist.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen konsistenten $M\}$

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-consistent}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen auf $\mathcal{L}$ konsistenten $M\}$

Wir werden den folgenden interessanten Satz zeigen:

Satz 1: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}} \subsetneq [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-consistent}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Tatsächlich werden die folgenden Überlegungen nicht alle Teile dieses Satzes zeigen...

Lemma: Ist $\mathcal{L} \in [\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}}$, so ist $L \in \mathcal{L}$ entscheidbar.
Folgerung: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$, denn $\{\mathcal{K}\} \in \mathbf{TxtEx}$.

Beweis: Betrachte $L \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{L} \in [\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}}$.

Es sei M ein rekursiver (insbes. totaler) konsistenter Lerner für L.

Der Satz von Blum & Blum liefert eine Schlussfolge σ für L und M.

Betrachte eine Zahl x.

Gilt $x \in L$, so ist $M(\sigma x) = M(\sigma)$, da σ Schlussfolge.

Gilt $x \notin L$, so ist $M(\sigma x) \neq M(\sigma)$, da M konsistent.

Da M total, liefert dies einen Entscheidungsalg. für das Elementproblem von L. $\square$

Achtung: Der Beweis arbeitet nicht für $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-consistent}}$, da unklar ist, ob zu σx ein $L' \in \mathcal{L}$ existiert, sodass $\sigma x \in L'$. Nur für diesen Fall muss die Konsistenzbedingung eingehalten werden.

Gibt es Familien entscheidbarer Sprachen außerhalb von $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}}$?

Hierzu dienen die folgenden Überlegungen:

Durch eine einfache Diagonalisierung kann man zeigen:

Lemma: Zu jeder $\{0,1\}$-wertigen rekursiven zweistelligen Funktion h gibt es eine entscheidbare Menge S, die sich von jeder der entscheidbaren Mengen $H_i = \{x \mid h(i,x) = 1\}$ unterscheidet.

Betrachte die folgenden selbstbeschreibenden Sprachen $L_i = \{\langle i,x\rangle \mid x \in W_i\}$ und die zugehörige Sprachfamilie $\mathcal{SDL} = \{L_i \mid W_i \text{ ist entscheidbar }\}$.

Ein Lerner weiß bereits beim ersten Element $\langle i,x\rangle$ sicher Bescheid (durch Projektion).

Dieser Lerner ist auch klassen-konsistent.

Lemma: $\mathcal{SDL} \subset \mathcal{REC} \wedge \mathcal{SDL} \in [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-consistent}} \setminus [\mathbf{TxtEx}]^{\text{consistent}}$.

Beweis: Betrachte einen konsistenten rekursiven Lerner M, der $\mathcal{SDL}$ identifiziert.

Die $\{0, 1\}$-wertige rekursive zweistellige Funktion h sei def. durch

$h(\langle\sigma, i\rangle, x) = 1$ gdw. $M(\sigma\langle i, x\rangle) = M(\sigma)$.

Nach dem vorigen Lemma gibt es eine rekursive Menge $S = W_k$, die sich von allen $H_j = \{x \mid h(j, x) = 1\}$ unterscheidet.

Sei σ eine Schlussfolge für M auf L_k.

Liegt $x \in W_k$, so gilt: $M(\sigma\langle k, x\rangle) = M(\sigma)$ und somit $h(\langle\sigma, k\rangle, x) = 1$.

Gilt $x \notin W_k$, so folgt aus der Konsistenz von M: $M(\sigma\langle k, x\rangle) \neq M(\sigma)$.

Nach Def. von h ist daher: $h(\langle\sigma, k\rangle, x) = 0$.

Also ist $S = W_k = H_{\langle\sigma,k\rangle}$ im Widerspruch zur Wahl von S. $\square$

Verständigkeit

Ein Lerner M heißt *verständig*, falls für alle $\sigma \in SEQ$ gilt:
Ist $M(\sigma)$ definiert, so kann M die Sprache $L(M(\sigma))$ identifizieren.
Ein verständiger Lerner äußert also niemals Hypothesen, die er nicht zu lernen imstande wäre.
Da diese Eigenschaft nichts mit Sprachen und Sprachklassen zu tun hat, gibt es nur eine sinnvolle abgeleitete Lernklasse:

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{prudent}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen verständigen $M\}$

Wir werden den folgenden interessanten Satz zeigen:
Satz 2 (Fulk): $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{prudent}} = \mathbf{TxtEx}$.
Hierzu bedarf es einiger Hilfsüberlegungen, und vollständig wird der Satz erst am Ende der Vorlesung bewiesen sein.

Einschränkungen bei der Benutzung der Informationen und bei der Konvergenz

Wir betrachten vier mögliche solche Einschränkungen:

set-driven Mengenbestimmtheit

rearr-independent Umordnungsunabhängigkeit

order-independent Textordnungsunabhängigkeit

reliable Zuverlässigkeit

Mengenbestimmtheit und Umordnungsunabhängigkeit:

Beschränkungen der Informationsnutzung

M heißt *mengenbestimmt* gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$, sobald $\mathrm{Inh}(\sigma) = \mathrm{Inh}(\tau)$, dann $M(\sigma) = M(\tau)$.
M heißt *umordnungsunabhängig* gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$, sobald $\mathrm{Inh}(\sigma) = \mathrm{Inh}(\tau)$ und $|\sigma| = |\tau|$, dann $M(\sigma) = M(\tau)$.

Wieder gibt es jeweile nur eine sinvolle abgeleitete Lernklasse:

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{set-driven}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen mengenbestimmten $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{rearr-independent}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen umordnungsunabhängigen $M\}$
Beschäftigen wird uns hier:
Satz 3 : $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{set-driven}} \subsetneq [\mathbf{TxtEx}]^{\text{rearr-independent}} = \mathbf{TxtEx}$.

Eine seltsame Sprachfamilie

$L_j := \{\langle j, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$ für $j \in \mathbb{N}$.
$\sigma^{j,n} := \langle j, 0\rangle\langle j, 1\rangle\langle j, 2\rangle \ldots \langle j, n\rangle$ für $j, n \in \mathbb{N}$.
Betrachte eine fixierte Aufzählung M_0, M_1, M_2, ... aller (totalen, berechenbaren) Forscher (s. VL 10).
Definiere für $j \in \mathbb{N}$:

$$L'_j = \begin{cases} \mathrm{Inh}(\sigma^{j,n}), & \text{falls es eine kleinste Zahl } \langle n, s\rangle \text{ gibt, sodass :} \\ & M_j(\sigma^{j,n}) = i \wedge W_{i,s} \supseteq \mathrm{Inh}(\sigma^{j,n}) \\ \{\langle j, 0\rangle\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte $\mathcal{L} = \{L_j, L'_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$, wie das folgende Verfahren zeigt:
Falls $\mathrm{Inh}(\sigma) = \{\langle j, 0\rangle\}$, ist die Hypothese $\mathrm{Inh}(\sigma)$.
Gilt $\mathrm{Inh}(\sigma) = \mathrm{Inh}(\sigma^{j,n})$ für geeignete j, n, so berechne zunächst $i = M_j(\sigma^{j,n})$.
Dann suche von $k = 0$ bis $|\sigma|$ ein Paar $k = \langle n, s\rangle$ mit $W_{i,s} \supseteq \mathrm{Inh}(\sigma^{j,n})$.
Gibt es so ein Paar, so äußere die Hypothese $\mathrm{Inh}(\sigma)$.
In allen anderen Fällen betrachte ein maximales j mit $\langle j, x\rangle \in \mathrm{Inh}(\sigma) \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$ und vermute L_j.

Lemma: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{set-driven}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Beweis: Angenommen, die auf der vorigen Folie definierte Sprachfamilie $\mathcal{L}$ werde von einem mengenbestimmten Lerner $M = M_j$ identifiziert.

Insbesondere identifiziert M den Text $T = \langle j, 0\rangle\langle j, 1\rangle\langle j, 2\rangle \cdots \langle j, n\rangle \cdots$ für L_j.

Aus dem Schlussfolgensatz folgt: Es gibt eine Schlussfolge σ_j für M auf L_j.

Mit $n = \max \mathrm{Inh}(\sigma_j)$ ist $\sigma_j\sigma^{j,n}$ ebenfalls eine Schlussfolge für M auf L_j.

Da M mengenbestimmt, gibt es eine Gödelnummer i für L_j, sodass gilt: $M(\sigma^{j,n}) = i$, denn $\sigma^{j,n} \sqsubset T$.

Aus dem Schlussfolgensatz ergibt sich, dass ab diesem n “Meinungsänderungen” ausgeschlossen sind.

Damit gibt es auch eine kleinste Zahl $k = \langle n, s\rangle$, sodass $M(\sigma^{j,n}) = i$ und $W_{i,s} \supseteq \mathrm{Inh}(\sigma^{j,n})$.

Dann kann $M = M_j$ aber nicht L_j' identifizieren, denn auf dem Text $T' = \sigma^{j,n}\langle j, n\rangle^{\omega}$ muss M im Grenzfall i als Hypothese liefern, aber $W_i = \mathbb{N} \neq \mathrm{Inh}(T')$. $\square$

Textordnungsunabhängigkeit

M heißt *textordnungsunabhängig auf* L gdw. für alle Texte T, T' für L gilt: konvergiert M auf T, so auch auf T', und es gilt ferner: $\mathrm{M}(\mathrm{T}) \downarrow = \mathrm{M}(\mathrm{T}') \downarrow$, d.h., es wird gegen dieselbe Hypothese konvergiert.
M heißt *textordnungsunabhängig auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist textordnungsunabhängig auf L für alle $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$.
M heißt *textordnungsunabhängig* gdw. M ist textordnungsunabhängig auf L für alle $\mathrm{L} \in \mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{order-independent}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(\mathrm{M})$ für einen textordnungsunabhängigen $\mathrm{M}\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-order-independent}}$
$= \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(\mathrm{M})$ für einen auf $\mathcal{L}$ textordnungsunabhängigen $\mathrm{M}\}$

Diese Einschränkung scheint zunächst erheblich zu sein, denn das Äquivalenzproblem für TM lässt sich ja nicht mit TM beantworten.
Insofern ist die Gleichheit dieser Lernklassen überraschend.

Wichtige Aussagen zur Textordnungsunabhängigkeit

Satz 4: Zu einem rekursiven Forscher M kann man effektiv einen rekursiven Forscher M' konstruieren, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. **TxtEx**$(M) \subseteq$ **TxtEx**(M').
2. M' ist textordnungsunabhängig.
3. M' ist umordnungsunabhängig.
4. Gibt es eine Schlussfolge für M' auf L, so identifiziert M' die Sprache L.
5. Falls M' die Sprache L identifiziert, so enthalten alle Texte für L eine Schlussfolge für M' auf L als Anfangsstück.

Folgerung: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{order-independent}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-order-independent}} = [\mathbf{TxtEx}]$.
Folgerung: Der Satz 3 ist nun vollständig bewiesen.

Weitere Hilfsbegriffe zum Beweis von Satz 4, A

$\sigma \in SEQ$ heißt *stabilisierende Folge* für den Lerner M auf L, falls
(a) $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$ und
(b) für alle $\tau \in SEQ$ mit $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L$ gilt: $M(\sigma) = M(\sigma\tau)$.
Jede Schlussfolge ist also stabilisierend, aber da stabilisierende Folgen nicht auf eine korrekte Hypothese konvergieren müssen, gilt die Umkehrung nur in der folgenden Form:

Lemma: Falls M die Sprache L identifiziert, dann ist jede für M auf L stabilisierende Folge σ mit $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$ eine Schlussfolge für M auf L.

Weitere Hilfsbegriffe zum Beweis von Satz 4, B

Wir führen jetzt eine Bezeichnung für “besonders kleine Bruckstücke” einer Folge ein; dies ist hilfreich für notwendiges effektives Suchen:
Für $\sigma \in SEQ$ sei $\mathrm{visible}(\sigma) = \{\sigma' \in SEQ \mid \sigma' < |\sigma| \wedge \mathrm{Inh}(\sigma') \subseteq \mathrm{Inh}(\sigma)\}$.

Hierbei: Durch iterierte Cantorpaarbildung kann man Folgen von Zahlen wiederum als Zahlen auffassen und somit mit Zahlen vergleichen.

Für einen Forscher M und eine Folge $\sigma \in SEQ$ heißt $\sigma_0 \in SEQ$ *Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ* gdw.
(a) $\mathrm{Inh}(\sigma_0) \subseteq \mathrm{Inh}(\sigma)$ und
(b) Für alle $\sigma' \in \mathrm{visible}(\sigma)$ mit $\sigma_0 \sqsubseteq \sigma'$ gilt: $M(\sigma_0) = M(\sigma')$.

Eigenschaften von Kandidaten für stabilisierende Folgen I (Bew. zur Übung)

(1) Bei Eingabe von (der Gödelnummer von) M, $\sigma, \sigma_0 \in SEQ$ kann eine geeignete TM entscheiden, ob σ_0 Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ ist.

(2) Für alle M und σ gibt es einen Kandidaten für eine stabilisierende Folge für M auf σ.

(3) Ist $\sigma_0 \in SEQ$ stabilisierend für M auf L, so ist σ_0 ein Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ für jedes $\sigma \in SEQ$ mit $\mathrm{Inh}(\sigma_0) \subseteq \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L$.

(4) Gilt $\mathrm{Inh}(\sigma_0) \subseteq \mathrm{Inh}(\sigma)$ und ist σ_0 <u>kein</u> Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ, so ist σ_0 <u>kein</u> Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf τ für alle τ mit $\sigma \sqsubseteq \tau$.

Eigenschaften von Kandidaten für stabilisierende Folgen II

Lemma: Sei M ein Forscher und T ein Text, sodass $\sigma \in \mathcal{SEQ}$ ein Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf $T[n]$ für unendlich viele n ist. Dann ist σ stabilisierend für M auf $\mathrm{Inh}(L)$.

Beweis: Angenommen, σ wäre nicht stabilisierend für M auf $\mathrm{Inh}(T)$.

Dann gäbe es ein σ' mit $\mathrm{Inh}(\sigma') \subseteq \mathrm{Inh}(\sigma)$, $\sigma \sqsubseteq \sigma'$ und $M(\sigma) \neq M(\sigma')$.

Andererseits wäre für fast alle n: $\sigma' \in \mathrm{visible}(T[n])$.

Also wäre für fast alle n die Folge σ kein Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf $T[n]$, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Eigenschaften von Kandidaten für stabilisierende Folgen III (Bew. zur Übung)

Folgerung: Es seien ein Forscher M und ein Text T gegeben. Es sei $\sigma_0 \in SEQ$. Dann sind äquivalent:

1. σ_0 ist stabilisierend für M auf $Inh(T)$.
2. σ_0 ist Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf $T[n]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
3. σ_0 ist Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf $T[n]$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Eine letzte Hilfsüberlegung zum Beweis von Satz 4

Wir hatten früher uns überlegt, dass jede aufzählbare Sprache unendlich viele Gödelnummern besitzt.

Hinweis: Fülle Programmtext durch NOP-Befehle auf. (Padding-Argument).

Formal bedeutet das: Es gibt eine injektive rekursive zweistellige Fkt. pad, für die gilt: $\forall j \in \mathbb{N} : W_{\mathrm{pad}(i,j)} = W_i$.

Für den Beweis von Satz 4 def. zu Lerner M:

M' mit $M'(\sigma) = \mathrm{pad}(M(\sigma_0), \sigma_0)$, wobei σ_0 die kleinste Folge ist (i.S. der Def. von $\mathrm{visible}$), welche Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ ist.

Nach den Vorüberlegungen kann dieses σ_0 durch eine TM stets zu M und σ bestimmt werden. Die letzte Folgerung liefert:

Behauptung: Für jeden text ist $M'(T) \downarrow = \mathrm{pad}(M(\sigma_0), \sigma_0)$ gdw. σ_0 ist die kleinste stabilisierende Folge für M auf $\mathrm{Inh}(T)$. Außerdem gilt $M'(T) \uparrow$, falls es keine stabilisierende Folge für M auf $\mathrm{Inh}(T)$ gibt.

Zum Beweis von Satz 4:

Wir müssen zeigen, dass der soeben angegebene Lerner M' die gewünschten Eigenschaften besitzt.

1. Zu zeigen: **TxtEx**$(M) \subseteq$ **TxtEx**(M').

   Beweis: Fixiere eine Sprache $L \in \mathbf{TxtEx}(M)$. Sei T ein Text für L.

   Aus dem Schlussfolgensatz ergibt sich, dass es eine stabilisierende Folge für M auf L gibt.

   Also gibt es auch eine kleinste stabilisierende Folge σ_0 für M auf L.

   Beh. $\rightsquigarrow M'(T) \downarrow= \mathrm{pad}(M(\sigma_0), \sigma_0)$.

   Vorletztes Lemma $\rightsquigarrow$ σ_0 ist ebenfalls Schlussfolge für M auf L.

   $\rightsquigarrow L(M'(T)) = W_{\mathrm{pad}(M(\sigma_0),\sigma_0)} = W_{M(\sigma_0)} = L(M(\sigma_0)) = L$.

2. Zu zeigen: M' ist textordnungsunabhängig.

   Beweis: Klar, denn nach Konstruktion hängt der Wert von $M'(T)$ nur von $\mathrm{Inh}(T)$ ab.

3. Zu zeigen: M' ist umordnungsunabhängig.

   Beweis: Klar, denn nach Konstruktion hängt der kleinste Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf σ nur von $\mathrm{Inh}(\sigma)$ und von $|\sigma|$ ab.

4. Zu zeigen: Gibt es eine Schlussfolge für M' auf L, so identifiziert M' die Sprache L.

   Beweis: Ist σ eine Schlussfolge für M' auf L, so identifiziert M' alle Texte, die σ verlängern.

   Da M' textordnungsunabhängig, identifiziert M' sogar alle Texte für L.

5. Zu zeigen: Falls M' die Sprache L identifiziert, so enthalten alle Texte für L eine Schlussfolge für M' auf L als Anfangsstück.

   Beweis: Angenommen, M' identifiziert die Sprache L.

   Es sei σ_0 die kleinste stabilisierende Folge für M auf L.

   Ferner sei T ein bel. Text für L.

   Wir werden (in Abh. von σ_0) ein n_0 angeben, sodass $T[n_0]$ Schlussfolge für M' auf L ist.

Wähle n_0 genügend groß, sodass gilt:

(a) Für alle $\sigma \in SEQ$, die kleiner oder gleich σ_0 sind, gilt: $\mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq L \iff \mathrm{Inh}(\sigma) \subseteq \mathrm{Inh}(T[n_0])$.

(b) Für alle $\sigma \in SEQ$, die kleiner als σ_0 sind, gilt: σ ist kein Kandidat für eine stabilisierende Folge für $T[n_0]$.

Solch ein n_0 existiert; für (b) benutze man die letzte Folgerung.

Aus der letzten der (von Ihnen als Übung nachgewiesenen) Eigenschaften ergibt sich:

Für alle $\tau \in SEQ$ mit $T[n_0] \sqsubseteq \tau$ und $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L$ ist σ_0 die kleinste Folge, welche Kandidat für eine stabilisierende Folge für M auf τ ist.

Nach Def. von “Kandidat” folgt: $T[n_0]$ ist eine Schlussfolge für M' auf L.

$\square$

Dieser Satz 3 wird uns nun helfen, Satz 2 zu beweisen.
Dazu benötigen wir nochmals einen Hilfsbegriff.

Aufzählbare Indizierungen und Erweiterungen

Eine Sprachklasse $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ heißt *aufzählbar indizierbar* gdw. es gibt ein $S \in \mathcal{E}$, sodass $\mathcal{L} = \{W_i \mid i \in S\}$.
S heißt dann auch eine *aufzählbare Indexmenge* für $\mathcal{L}$.

Eine Sprachklasse $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$ heißt *aufzählbar erweiterbar* gdw. es gibt eine aufzählbar indizierbare Sprachklasse $\mathcal{L}' \in \mathbf{TxtEx}$ mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Die im Folgenden formulierten und bewiesenen zwei Sätze werden die Aussage von Satz 2 unmittelbar nach sich ziehen.

Satz 5 : $\mathbf{TxtEx} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{prudent}}$ gdw. jede Klasse $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$ ist aufzählbar erweiterbar.

<u>Beweis:</u> 1. Angenommen, $\mathbf{TxtEx} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{prudent}}$.

Betrachte ein $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$.

Nach Ann. gibt es einen verständigen Forscher M, der $\mathcal{L}$ identifiziert.

Damit ist $S = \{M(\sigma) \mid \sigma \in SEQ\}$ eine aufzählbare Indexmenge.

Da M verständig, identifiziert M die Klasse $\mathcal{L}' = \{W_i \mid i \in S\}$.

Nach Konstruktion ist $\mathcal{L}'$ aufzählbar indizierbar und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

2. Falls jede Klasse $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$ is aufzählbar erweiterbar ist, so betrachte ein festes $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$ und eine aufzählbar indizierbare Oberklasse $\mathcal{L}'$ mit aufzählbarer Indexmenge S.

Gemäß Satz 4 gibt es einen rekursiven textordnungsunabhängigen Forscher M, der $\mathcal{L}'' \supseteq \mathcal{L}'$ identifiziert.

Wir werden aus M einen verständigen Forscher M' für $\mathcal{L}'$ (und damit für $\mathcal{L}$) konstruieren.

Es sei $s_0, s_1, \ldots$ eine wiederholungsfreie Aufzählung von S.

Obacht: Diese ex. immer (Schwalbenschwanz), es wird nicht die Wiederholungsfreiheit der dadurch implizierten Aufzählung $W_{s_0}, W_{s_1}, \ldots$ gefordert, siehe VL 5.

Definiere (rekursiv) Text T^i für W_{s_i} durch: $T[\langle t, x\rangle] = x$, falls die Berechnung der s_i-ten TM, angesetzt auf x, nach t Schritten anhält; andernfalls gilt: $T[\langle t, x\rangle] = \#$.

Definiere für $\sigma \in SEQ$:

$M'(\sigma) = \min\left(\{s_{|\sigma|}\} \cup \{s_i \mid i \leq |\sigma| \wedge M(T^i[|\sigma|]\right) = M(\sigma)$.

Da M textordnungsunabhängig ist und $\mathcal{L}'$ identifiziert, konvergiert auch M' auf jedem Text T für $L \in \mathcal{L}'$ gegen ein $s_i \in S$ mit $W_{s_i} = L$.

Ferner ist jedes $s_i \in S$ Index einer Sprache aus $\mathcal{L}'$, und M' äußert nur Hypothesen aus S.

Somit ist M' verständig und identifiziert $\mathcal{L}'$. $\square$

Satz 6 : Jede Klasse $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$ ist aufzählbar erweiterbar.

Beweis: Wähle festes bel. $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$. Nach Satz 4 ist $\mathcal{L}$ durch einen Forscher M identifizierbar, der L identifiziert gdw. es gibt eine Schlussfolge für M auf L.
O.E. sei $\emptyset \in \mathcal{L}$ (sonst ändere die folgende Konstruktion leicht ab).
Wir geben im Folgenden eine aufzählbar indizierbare Klasse $\mathcal{L}' \in \mathbf{TxtEx}$ an mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.
Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) M identifiziert $\mathbb{N}$. Def. eine rekursive Fkt. f wie folgt:

$$W_{f(\sigma)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \mathrm{Inh}(\sigma) \not\subseteq W_{M(\sigma)}, \\ W_{M(\sigma)}, & \text{falls } \sigma \text{ Schlussfolge für } M \text{ auf } W_{M(\sigma)}, \\ \mathbb{N}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Warum ist f rekursiv? Um $W_{f(\sigma)}$ aufzuzählen zu σ, mache Folgendes:
Zähle gar nichts auf, bis wir eine Stufe s erreicht haben, sodass $\mathrm{Inh}(\sigma) \not\subseteq W_{M(\sigma),s}$.
(Wird diese Stufe nie erreicht, so wird korrekterweise die leere Menge geliefert.)
Von diesem Punkt an wird $W_{M(\sigma)}$ aufgezählt, bis man evtl. irgendwann entdeckt, dass es eine Folge $\gamma \in SEQ$ gibt mit: $\sigma \sqsubset \gamma$, $\mathrm{Inh}(\gamma) \subseteq L(M(\sigma))$ und $M(\gamma) \neq M(\sigma)$.
Wird so ein γ entdeckt, wird ganz $\mathbb{N}$ enumeriert.
Da f rekursiv, ist $S = \{f(\sigma) \mid \sigma \in SEQ\}$ aufzählbar.
Da M neben $\emptyset$ und $\mathbb{N}$ jede Sprache mit einer Schlussfolge identifiziert, kann M jede Sprache mit

einem Index aus S identifizieren.

(2) Wenn M die Sprache $\mathbb{N}$ nicht identifiziert, so def. eine rekursive Fkt. f wie folgt:

$$W_{f(\sigma)} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \mathrm{Inh}(\sigma) \not\subseteq W_{M(\sigma)}, \\ W_{M(\sigma)}, & \text{falls } \sigma \text{ Schlussfolge für } M \text{ auf } W_{M(\sigma)}, \\ \{0, 1, \ldots, y\}, & \text{sonst. Hierbei ist } y \text{ das größte Element, welches in } W_{f(\sigma)} \\ & \text{aufgezählt wurde bis zu dem Zeitpunkt, da entdeckt wurde,} \\ & \text{dass } \sigma \text{ keine Schlussfolge für } M \text{ auf } W_{M(\sigma)} \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Rekursivität von f sieht man ähnlich wie zuvor.
Außerdem gibt es eine rekursive Fkt. g, die zu y einen Index von $\{0, 1, \ldots, y\}$ liefert.
Sei $S = \{f(\sigma) \mid \sigma \in SEQ\} \cup \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Da f und g rekursiv, ist S aufzählbar.
S ist also aufzählbare Indesmenge eine Sprachklasse $\mathcal{L}'$ mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.
S enthält alle möglichen Hypothesen von M und (darüber hinaus) alle "Anfänge" von $\mathbb{N}$.
Sei r die rekursive Fkt., welche zu $\sigma \in SEQ$ einen Index liefert, sodass $W_{r(\sigma)} = \mathrm{Inh}(\sigma)$.
Wir zeigen $\mathcal{L}' \in \mathbf{TxtEx}$ durch Angabe eines Lerners M' für $\mathcal{L}'$:

$$M'(\sigma) = \begin{cases} r(\sigma), & \exists y(\mathrm{Inh}(\sigma) = \{0, 1, \ldots, y\}) \\ M(\sigma), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da M nicht $\mathbb{N}$ identifiziert, kann M' alles identifizieren, was M identifiziert. $\square$

Zuverlässigkeit

Ein Lerner, der manchmal gegen eine falsche Hypothese konvergiert, ist "unzuverlässig".

M heiße *zuverlässig auf* L gdw. für jeden Text T für L gilt: Falls $M(T) \downarrow$, so $L(M(T)) = L$.
M heiße *zuverlässig auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist zuverlässig auf L für jedes $L \in \mathcal{L}$.
M heißt *zuverlässig* gdw. M ist zuverlässig auf $\mathcal{E}$.

Beispielsweise ist der nirgends konvergierende Lerner zuverlässig.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{reliable}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen zuverlässigen $M\}$

Beispielsweise ist unser Standard-$\mathcal{FIN}$-Lerner zuverlässig.
Der Standard-Lerner für $\{\mathbb{N} \setminus \{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$ ist nicht zuverlässig:
Er konvergiert (fälschlicherweise) gegen die Hypothese $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ auf einem Text, der genau die geraden Zahlen auflistet.

Zuverlässigkeit ist eine wichtige Eigenschaft für Lerner.
Ein zuverlässiger Forscher wird stets irgendwann “einsehen”, dass seine Hypothese falsch war, und das durch eine veränderte Hypothese kundtun.
Wäre das nicht der Fall, so gäbe es einen Text T, sodass ab einem n_0 gälte: $M(T[n]) = M(T[n_0]) \neq L(T)$.

Leider ist diese Einschränkung viel zu stark:
Satz 7: Wird $L \in \mathcal{E}$ von einem zuverlässigen Forscher M identifiziert, so ist L endlich.

Beweis: Es sei σ eine Schlussfolge für M auf L.

Auf dem Text $T = \sigma\#^\omega$ konvergiert M gegen einen Index von L.

Da die Hypothese stimmen muss aufgrund der Zuverlässighkeit von M, gilt $L = \mathrm{Inh}(T) = \mathrm{Inh}(\sigma)$, also ist L endlich. $\square$

Folgerung: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{reliable}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Einschränkungen hinsichtlich des Verhältnisses von geäußerten Hypothesen zueinander

Wir wollen hier drei solche Einschränkungen diskutieren:

Konservatismus: Hypothesen werden nur geändert, wenn es einen Grund dafür gibt.

Speicherbeschränkung: Der Lerner darf sich keine beliebige Vorgeschichte merken.

Monotonie (duale Monotonie): Hypothesen sollen immer mehr generalisieren (spezialisieren)

Die letzteren Kriterien gibt es in verschiedenen formalen Varianten.

Konservative Lerner

Ein Lerner, der seine Meinung nur gezwungenermaßen ändert, ist “konservativ”. Wissenschaftstheoretiker vertreten die Meinung, dass die Wissenschaft im Allgemeinen selbst in diesem Sinne konservativ ist.

M heiße *konservativ auf* L gdw. für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{SEQ}$ gilt: Falls $\sigma \sqsubseteq \tau$, $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L$ und $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L(M(\sigma))$, so $M(\tau) = M(\sigma)$.
M heiße *konservativ auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist konservativ auf L für jedes $L \in \mathcal{L}$.
M heißt *konservativ* gdw. M ist konservativ auf $\mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{conservative}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen konservativen $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-conservative}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen auf $\mathcal{L}$ konservativen $M\}$
Wir werden den folgenden interessanten Satz zeigen:
Satz 8: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{conservative}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-conservative}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.
Tatsächlich werden die folgenden Überlegungen nicht alle Teile dieses Satzes zeigen. . .

$[\mathbf{TxtEx}]^{\textbf{class-conservative}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Die Inklusion selbst ist klar per def.

Die Echtheit der Inklusion folgt dem Argument für mengenbestimmte Lerner, siehe Satz 3.

Sei also $\mathcal{L}$ wieder die "seltsame Sprachfamilie" und M_j ein konservativer Lerner dafür.

Wie zuvor argumentiert, muss M_j den Text $\langle j, 0\rangle\langle j, 1\rangle \cdots$ für L_j identifizieren.

Es gibt ein kleinstes $\langle n, s\rangle$ mit $M_j(T[n]) = i$ und $W_{i,s} \supseteq Inh(T[n])$.

Daher wird L_j' nicht durch M_j identifiziert, denn aufgrund der Konservativität von M_j muss M_j auf dem Text $T = \langle j, 0\rangle\langle j, 1\rangle \cdots \langle j, n\rangle^\omega$ auf dem gesamten "Endstück" $\langle j, n\rangle^\omega$ die Hypothese i äußern. □

Monotonie I

Die vielleicht natürlichste Formalisierung dieses Begriffs wurde von Jantke formuliert:

M heiße *stark monoton auf* L gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$ gilt: Falls $\sigma \sqsubseteq \tau$ und $Inh(\tau) \subseteq L$, so $L(M(\sigma)) \subseteq L(M(\tau))$.
M heiße *stark monoton auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist stark monoton auf L für jedes $L \in \mathcal{L}$.
M heißt *stark monoton* gdw. M ist stark monoton auf $\mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{strong-monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen stark monotonen $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-strong-monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen auf $\mathcal{L}$ stark monotonen $M\}$
Wir wollen hier nur den folgenden Sachverhalt ohne Beweis erwähnen:

Satz 9: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{strong-monotonic}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-strong-monotonic}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Die Einschränkung ist intuitiv gesehen sehr stark: Ein Forscher, der je irgendwann einmal eine Hypothese äußert, die ein “falsches Element” enthält, kann nie korrekt konvergieren.

Monotonie II

Wiehagen hat die Def. von Jantke abgeschwächt auf ein monotones Verhalten bzgl. der Zielsprache:
M heiße *monoton auf* L gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$ gilt: Falls $\sigma \sqsubseteq \tau$ und $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L$, so $L(M(\sigma)) \cap L \subseteq L(M(\tau)) \cap L$.
M heiße *monoton auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist monoton auf L für jedes $L \in \mathcal{L}$.
M heißt *monoton* gdw. M ist monoton auf $\mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen monotonen $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen auf $\mathcal{L}$ monotonen $M\}$
Wir wollen hier nur den folgenden Sachverhalt (fast) ohne Beweis erwähnen:

Satz 10: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{strong-monotonic}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{monotonic}} \subsetneq [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-monotonic}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Hiervon wollen wir wenigstens die Echtheit der letzten Inklusion diskutieren.
Warnung: Im Lehrbuch “STL” wird “class-monotonic” als “monotonic” angesprochen.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-monotonic}} \subsetneq \mathbf{TxtEx}$.

Beweis: Betrachte für m, n folgende Sprachen:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle 0, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\} \\ L_2^m &= \{\langle 0, x\rangle \mid x \leq m\} \cup \{\langle 1, x\rangle \mid x > m\} \\ L_3^{m,n} &= \{\langle 0, x\rangle \mid x \leq m \vee x > n\} \cup \{\langle 1, x\rangle \mid m < x \leq n\}. \end{aligned}$$

Sprachfamilie $\mathcal{L} = \{L_1\} \cup \{L_2^m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{L_3^{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\}$. Klar (?): $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$.

Wir zeigen: $\mathcal{L} \notin [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-monotonic}}$. Betrachte dazu M, der $\mathcal{L}$ identifiziert.

Da M insbesondere L_1 identifiziert, gibt es ein m und ein σ, sodass:

(a) $\mathrm{Inh}(\sigma) = \{\langle 0, x\rangle \mid x \leq m\}$, (b) $L(M(\sigma)) = L_1$.

Da M auch L_2^m identifiziert, gibt es ferner ein n und ein σ' mit $\sigma \sqsubseteq \sigma'$, sodass:

(a) $\mathrm{Inh}(\sigma') = \{\langle 0, x\rangle \mid x \leq m\} \cup \{\langle 1, x\rangle \mid m < x \leq n\}$, (b) $L(M(\sigma')) = L_2^m$.

Da M auch $L_3^{m,n}$ identifiziert, ex. ein σ'' mit $\sigma' \sqsubseteq \sigma''$, $\mathrm{Inh}(\sigma'') \subseteq L_3^{m,n}$, sodass $L(M(\sigma'') = L_3^{m,n}$.

M kann nicht monoton sein bei der Identifizierung von $L_3^{m,n}$.

Betrachte dazu $\langle 0, n+1\rangle \in L_3^{m,n} \cap L(M(\sigma)) \cap L(M(\sigma''))$, währenddessen $\langle 0, n+1\rangle \notin L(M(\sigma'))$.

$\square$

Monotonie III

Lange und Zeugmann haben die folgende Variante vorgeschlagen:
M heiße *schwach monoton auf* L gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$ gilt: Falls $\sigma \sqsubseteq \tau$ und $Inh(\tau) \subseteq L \cap L(M(\sigma))$, so $L(M(\sigma)) \subseteq L(M(\tau))$.
M heiße *schwach monoton auf* $\mathcal{L}$ gdw. M ist schwach monoton auf L für jedes $L \in \mathcal{L}$.
M heißt *schwach monoton* gdw. M ist schwach monoton auf $\mathcal{E}$.

$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{weak-monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen schwach monotonen $M\}$
$[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-weak-monotonic}} = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subseteq \mathbf{TxtEx}(M)$ für einen auf $\mathcal{L}$ schw. mon. $M\}$
Wir wollen hier nur den folgenden Sachverhalt ohne Beweis erwähnen:

Satz 10: $[\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-monotonic}} \subsetneq [\mathbf{TxtEx}]^{\text{conservative}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{weak-monotonic}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-weak-monotonic}}$.
Die Echtheit der ersten Inklusion folgt aus dem Beweis auf der letzten Folie. Warum? Überlegen Sie sich “einfache Inklusionsrichtungen.”

Spezialisierungsstrategien

erhält man aus den vorgestellten Generalisierungsstrategien durch Umkehren (Dualisieren) der Monotonie-Eigenschaft.

Bsp.: M heiße *schwach dual monoton auf* L gdw. für alle $\sigma, \tau \in SEQ$ gilt: Falls $\sigma \sqsubseteq \tau$ und $\mathrm{Inh}(\tau) \subseteq L \cap L(M(\sigma))$, so $L(M(\sigma)) \supseteq L(M(\tau))$.

Auf die formale Einführung anderer (entsprechender) Begriffe sei nun verzichtet.

Kinber und Stephan konnten zeigen:

Satz 11: $\mathbf{TxtEx} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{dual-weak-monotonic}} = [\mathbf{TxtEx}]^{\text{class-dual-weak-monotonic}}$.

Den interessanten Beweis finden Sie auf S. 114 in “STL”.

Evtl. kann man ihn in der Übung besprechen.

Speicherbeschränkte Lerner

Wir setzen:
$\sigma^- = \emptyset$, falls $\sigma = \emptyset$,
und $\sigma^- = (\sigma(0), \ldots, \sigma(|\sigma| - 2))$, falls $\sigma \in SEQ \setminus \{\emptyset\}$;
$\sigma_{last} = \#$, falls $\sigma = \emptyset$,
und $\sigma_{last} = \sigma(|\sigma| - 1)$, falls $\sigma \in SEQ \setminus \{\emptyset\}$.

Ein Lerner F heißt *speicherbeschränkt*, falls
$\forall \sigma, \tau \in SEQ\ F(\sigma^-) = F(\tau^-) \wedge \sigma_{last} = \tau_{last} \Rightarrow F(\sigma) = F(\tau)$.

Satz 12: Es gibt ein $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{L}$ identifizierbar, aber nicht speicherbeschränkt identifizierbar.

Beweis: Sei $L = \{\langle 0, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$ und
$L_j = L \cup \{\langle 1, j\rangle\}$ bzw. $L_j' = L_j \setminus \{\langle 0, j\rangle\}$.
$\mathcal{L} = \{K\} \cup \{L_j, L_j' \mid j \in \mathbb{N}\}$. Klar (?): $\mathcal{L} \in \mathbf{TxtEx}$.
Angenommen, ein speicherbeschränkter Lerner F würde $\mathcal{L}$ identifizieren.
Betrachte also eine Schlussfolge σ von F auf L.
Wähle j_0 so, dass $\langle 0, j_0\rangle \notin \mathrm{Inh}(\sigma)$.
Da $\langle 0, j_0\rangle \in L$, gilt $F(\sigma) = F(\sigma\langle 0, j_0\rangle)$.
Betrachte $\tau = \sigma\langle 1, j_0\rangle$ und $\gamma = \sigma\langle 0, j_0\rangle\langle 1, j_0\rangle$.
Wie eben gesehen, gilt $F(\tau^-) = F(\gamma^-)$ und ebenso $\tau_{last} = \gamma_{last}$.
Aus der Speicherbeschränktheit folgt: $F(\tau) = F(\gamma)$.
Sei S ein bel. Text für $L \setminus \{\langle 0, j\rangle\}$.
Def. $T^\tau = \tau S$ und $T^\gamma = \gamma S$.
T^γ ist ein Text für L_{j_0} und T^τ ist ein Text für L_{j_0}'.
Aufgrund der Speicherbeschränktheit konvergiert F auf T^τ und auf T^γ gegen denselben Wert.
Das widerspricht der angenommenen Identifizierbarkeit von $\mathcal{L}$. $\square$

Fette Texte

Ein Text T heißt *fett*, falls
$\forall i \in \mathrm{Inh}(T) : |\{ n \mid T(n) = i \}| = \infty$.

Mitteilung: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$ ist genau dann identifizierbar, wenn $\mathcal{L}$ von einem speicherbeschränkten Lerner auf fetten Text identifiziert werden kann.

Einordnung und Ausblick

In diesen beiden VL haben wir verschiedene Lernstrategien untersucht.
Hierbei haben wir wesentliche Teile des 5. Kapitels von “Systems That Learn” behandelt.

Trotz der nachgewiesenen Beschränkungen, die diverse Lernstrategien besitzen, werden in der Praxis meist Lernverfahren eingesetzt, die konsistent, konservativ, speicherbeschränkt und (dual) monoton sind.
Näheres in der Vorlesung über Lernalgorithmen.

In der nächsten VL werden wir schlaglichtartig einige (weitere) Aspekte der Lerntheorie beleuchten, dann unter dem Blickwinkel des Funktionenlernens.