Rekursions- und Lerntheorie

WiSe 2010/11; Univ. Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Rekursions- und Lerntheorie Gesamtübersicht

1. Einführung: Grundsätzliche Betrachtungen

2. Berechenbarkeitstheorie: Die Churchsche These (4 VL)

3. Ausblicke auf weitere Ergebnisse der Rekursionstheorie

4. Lerntheorie: Modelle und Aussagen

Lernstrategien

Hierunter wollen wir keine konkreten Algorithmen verstehen, sondern eher Klassen von Verfahren, welche i.d.R. gewissen Einschränkungen genügen.
Folgende Arten von Einschränkungen werden üblicherweise betrachtet:

- Einschränkungen möglicher Hypothesen
- Einschränkungen der Benutzung von Informationen
- eingeschränkte Arten der Konvergenz
- Einschränkungen hinsichtlich des Verhältnisses von geäußerten Hypothesen zueinander

Anwendung auf das Lernen von Funktionen: Konsistenz

Erinnerung: Eine Funktion f kann mit ihrem kanonischen Text $(0, f(0)(1, f(1))$ $(2, f(2))\ldots$ identifiziert werden.

Ein Lerner M heißt *konsistent auf dem kanonischen Funktionentext* f, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f[n] = \{(0, f(0)), \ldots, (n-1, f(n-1))\} \subseteq h_{M(f[n])}$.

M ist konsistent auf $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, falls M konsistent auf jedem $f \in \mathcal{S}$ ist.

M ist konsistent, falls M konsistent auf $\mathcal{R}$ ist.

$[\mathbf{Ex}]^{\text{consistent}} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ex}(M) \text{ für einen konsistenten } M\}$

$[\mathbf{Ex}]^{\text{class-consistent}} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ex}(M) \text{ für einen auf } \mathcal{S} \text{ konsistenten } M\}$

Wir werden den folgenden interessanten Satz zeigen:

Satz 1: $[\mathbf{Ex}]^{\text{consistent}} \subsetneq [\mathbf{Ex}]^{\text{class-consistent}} \subsetneq \mathbf{Ex}$.

Tatsächlich werden die folgenden Überlegungen nur den ersten Teil dieses Satzes zeigen.

Der fragliche Beweisteil:

Betrachte $\mathcal{SD} = \{f \in \mathcal{R} \mid h_{f(0)} = f\}$: Die Klasse der *selbstbeschreibenden Funktionen*.
Der in VL 10 beschriebene Lerner ist klassenkonsistent.
Angenommen, ein auf $\mathcal{R}$ konsistenter (totaler) Forscher M identifiziert $\mathcal{SD}$.
Betrachte die folgende zweistellige rekursive Funktion:

$$\psi(e, x) = \begin{cases} e, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x > 0 \wedge M(h_e[x](x, 0)) \neq M(h_e[x]) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem zweiten Fixpunktsatz von Kleene gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ mit $h_e(x) = \psi(e, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Nach Konstruktion gilt: $h_e \in \mathcal{SD}$.
Da M konsistent, gilt für alle $x > 0$: (1) $M(h_e[x](x, 0)) \neq M(h_e[x])$ oder es gilt: (2) $M(h_e[x](x, 1)) \neq M(h_e[x])$ (falls doch Gleichheit im ersten Fall) .
Im Fall (1) gilt per def. (von ψ) $h_e(x) = 0$,
also $h_e[x](x, 0) = h_e[x + 1]$, d.h.: $M(h_e[x + 1]) \neq M(h_e[x])$.
Im Fall (2) gilt per def. (von ψ) $h_e(x) = 1$,
also $h_e[x](x, 1) = h_e[x + 1]$, d.h.: $M(h_e[x + 1]) \neq M(h_e[x])$.
Also: $\mathcal{SD} \notin [\mathbf{Ex}]^{\text{consistent}}$. $\square$

Überprüfbarkeit

Diese Eigenschaft möchte, dass eine geäußerte Hypothese auch “extern” durch eine Turingmaschine durch Überprüfen von Eingaben getestet werden kann.

Dies wurde insbesondere von Popper in der Wissenschaftstheorie für wissenschaftliche Hypothesen gefordert.

Ein Lerner M heißt *poppersch auf dem kanonischen Funktionentext* f, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $h_{M(f[n])} \in \mathcal{R}$.

M ist poppersch auf $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, falls M poppersch auf jedem $f \in \mathcal{S}$ ist.

M ist poppersch, falls M poppersch auf $\mathcal{R}$ ist.

$[\mathbf{Ex}]^{\text{Popperian}} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ex}(M)$ für einen popperschen $M\}$

$[\mathbf{Ex}]^{\text{class-Popperian}} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ex}(M)$ für einen auf $\mathcal{S}$ popperschen $M\}$

Wir werden den ersten Teil des folgenden Satzes zeigen:

Satz 2: $[\mathbf{Ex}]^{\text{Popperian}} \subsetneq [\mathbf{Ex}]^{\text{class-Popperian}} \subsetneq \mathbf{Ex}$.

Der fragliche Beweisteil:

Betrachte wiederum $SD = \{f \in \mathcal{R} \mid h_{f(0)} = f\}$.
Der in VL 10 beschriebene Lerner ist klassenpoppersch.
Angenommen, ein auf $\mathcal{R}$ popperscher (totaler) Forscher M identifiziert SD.
Betrachte die folgende zweistellige rekursive Funktion:

$$\psi(e, x) = \begin{cases} e, & \text{falls } x = 0 \\ h_{M(h_e[x])}(x) + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem zweiten Fixpunktsatz von Kleene gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ mit $h_e(x) = \psi(e, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Nach Konstruktion gilt: $h_e \in SD$, denn M poppersch impliziert, dass h_e total.
Dieser Index e wird aber nie Hypothese von M sein, denn es gilt für alle x:
$h_e(x) = h_{M(h_e[x])}(x) + 1 \neq h_{M(h_e[x])}(x)$.
Also: $SD \notin [\mathbf{Ex}]^{\text{Popperian}}$. $\square$

Eine Kennzeichnung von Überprüfbarkeit

Wie bei Sprachen heiße $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ *aufzählbar indizierbar*, falls es eine Menge $S \in \mathcal{E}$ gibt mit: $\mathcal{S} = \{h_e \mid e \in S\}$.

Stärker abgeändert ist der Begriff der *aufzählbaren Erweiterbarkeit*, der zur folgenden Funktionenfamilienklasse führt:

Enum $= \{\mathcal{S} \mid (\exists \mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S})[\mathcal{S}'$ ist aufzählbar indizierbar$]\}$.

Satz 3: **Enum** $= [\mathbf{Ex}]^{\text{Popperian}}$.

Beweis: Ist $\mathcal{S} \in [\mathbf{Ex}]^{\text{Popperian}}$, so betrachte einen popperschen Lerner M, der jede Funktion aus $\mathcal{S}$ identifiziert.

Für die Menge der möglichen Hypothesen $\mathcal{S}' = \{h_{M(\sigma)} \mid \sigma \in SEG\}$ gilt: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{R}$, und die aufzählbare Indizierung von $\mathcal{S}'$ ist in der Def. mitgeliefert.

Sei umgekehrt $\mathcal{S}$ nun aufzählbar indizierbar, d.h., es gibt ein $g \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{S} = \{h_{g(e)} \mid e \in \mathbb{N}\}$.

Definiere M auf $INIT$ wie folgt:

$M(\sigma) = g(\min(\{|\sigma|\} \cup \{i < |\sigma| \mid \sigma = h_{g(i)}[|\sigma|]\}))$. M ist poppersch und $\mathcal{S} \subseteq$ **Ex**(M). $\square$

Zuverlässigkeit

Ein Lerner M heißt *zuverlässig auf dem kanonischen Funktionentext* f, falls gilt:
$M(f)\downarrow \implies h_{M(f)} = f$.
M ist zuverlässig auf $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, falls M zuverlässig auf jedem $f \in \mathcal{S}$ ist.
M ist zuverlässig, falls M zuverlässig auf $\mathcal{R}$ ist.

$[\mathbf{Ex}]^{\text{reliable}} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ex}(M)$ für einen zuverlässigen $M\}$

Satz 4: $[\mathbf{Ex}]^{\text{reliable}} \subsetneq \mathbf{Ex}$.

Beweis: Wir benötigen folgende Hilfsaussage:
Ist M zuverlässig, so gibt es eine rekursive Funktion t, sodass für alle $\sigma \in \mathrm{INIT}$ gilt: $\sigma \sqsubseteq t(\sigma)$ und $M(\sigma) \neq M(t(\sigma))$.
Sonst könnte M nur eine mit σ konsistente Funktion lernen und also nicht für alle mit σ konsistenten rekursiven Funktionen zuverlässig konvergieren.
Damit zeigen wir: SD kann nicht von einem zuverlässigen Forscher gelernt werden.
Die Folge $\sigma_{e,0} = (e, 0)$, $\sigma_{e,i+1} = t(\sigma_{e,i})$ definiert eine zweistellige rekursive Funktion $\psi(e, x)$.
Nach dem zweiten Kleeneschen Fixpunktsatz gibt es ein e, sodass $\forall x \in \mathbb{N}$: $h_e(x) = \psi(e, x)$.
Nach Konstruktion gilt: $h_e \in SD$, aber M divergiert.
Also: $SD \notin \mathbf{Ex}(M)$. □

Einordnung und Ausblick

In diesen beiden VL haben wir verschiedene Lernstrategien untersucht.
Hierbei haben wir Einiges aus dem letzten Teil des 5. Kapitels von "Systems That Learn" behandelt.
Funktionenlernen stand dabei im Vordergrund.
In der nächsten VL werden wir schlaglichtartig einige (weitere) Aspekte der Lerntheorie beleuchten.