

# Rekursions- und Lerntheorie

## WiSe 2010/11; Univ. Trier

Henning Fernau  
Universität Trier  
fernau@uni-trier.de

## **Rekursions- und Lerntheorie** Gesamtübersicht

1. Einführung: Grundsätzliche Betrachtungen
2. Berechenbarkeitstheorie: Die Churchsche These (4 VL)
3. Ausblicke auf weitere Ergebnisse der Rekursionstheorie
4. Lerntheorie: Modelle und Aussagen

## Noch mehr zu Notationen

Erinnerung: Standardnotation (Programmiersprache)  $h$

$\leadsto$  *Gödelnummerierung*

d.h.: berechenbare Aufzählung von partiell rekursiven Funktionen  $h_n$  bzw. von aufzählbaren Mengen  $W_n$  (über eingeschränkte charakteristische Funktion)

d.h., z.B.,  $\langle n, x \rangle \mapsto h_n(x)$  ist partiell rekursiv.

**Satz 1.** Jede partiell rekursive Funktion hat unendlich viele Gödelnummern.

**Satz 2.** Es gibt keine berechenbare Aufzählung für die rekursiven Mengen.

Beweis: Äquivalent dazu gäbe es eine Aufzählung für die charakteristischen Funktionen, also eine Funktion  $f$ , so dass  $h_{f(x)}$  total wäre sowie 0, 1-wertig für jedes  $x$ .

Definiere  $g(x) = 1 - h_{f(x)}(x)$ .

$g$  ist total berechenbar und 0, 1-wertig, aber nicht als  $h_{f(y)}$  darstellbar.

**Ein einfacher Diagonalbeweis!**

## Nochmal Nummerierungen

Wir werden sehen: Nummerierungen müssen nicht *universell* sein, also nicht alle berechenbaren Funktionen (oder alle rekursive aufzählbaren Mengen) auflisten. In jedem Fall heiÙe eine Nummerierung  $\psi$  *akzeptabel* oder *Gödel-Nummerierung*, falls es zu jeder weiteren Nummerierung  $\vartheta$  eine berechenbare totale Funktion  $f$  gibt mit  $\vartheta_e = \psi_{f(e)}$  für alle  $e$ . (*Übersetzungseigenschaft*)

Etwas großzügiger kann man eine Nummerierung für  $\mathcal{L}$  auch als Nummerierung für  $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$  ansehen.

In diesem Sinne ist der letzte Satz zu verstehen.

**Akzeptable Notationen** sind solche, die zur Standardnotation äquivalent sind, die sich also “ineinander” übersetzen lassen.

**Satz 3.** Es gibt Notationen, die nicht akzeptabel sind.

Beweis: Betrachte  $A = \{\langle i, j \rangle \mid \exists d, e \leq i [h_e(d) = \langle i, j \rangle]\}$ .

$A$  ist rekursiv aufzählbar. Betrachte solch eine Aufzählung.

$A_s$ : Menge der Elemente von  $A$ , die in  $s$  Schritten aufgezählt wurde.

$$\psi_{\langle i, j \rangle}(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{falls } \langle i, j \rangle \notin A_x; \\ \uparrow & \text{falls } \langle i, j \rangle \in A_x. \end{cases}$$

Das Komplement von  $A$  ist unendlich.  $\leadsto \exists^\infty j [\psi_{\langle i, j \rangle} = h_i]$ .  $\leadsto \psi$  ist Notation.

Annahme: Es gibt Übersetzung  $f = h_e$  mit  $\psi_{f(d)} = h_d$  für alle  $d$ .

Sei  $d$  nun der kleinste Index, sodass  $h_d$  total ist, aber  $h_d \neq h_0, \dots, h_d \neq h_e$ .

Seien  $i, j$  so, dass  $\langle i, j \rangle = h_e(d) = f(d)$ .

Nach Konstruktion:  $d > e$ .

- 1) Gilt  $i \geq d (\geq e)$ , so  $\langle i, j \rangle \in A$  sowie  $h_d \neq \psi_{\langle i, j \rangle}$ , denn  $h_d$  ist total, aber  $\psi_{\langle i, j \rangle}$  ist fast überall  $\uparrow$ .
- 2) Gilt  $i < d$  und  $\psi_{\langle i, j \rangle}$  ist total, so ist  $h_i = \psi_{\langle i, j \rangle}$ , aber nach der Wahl von  $d$  ist  $h_d \neq h_i$ .
- 3) Gilt  $i < d$  und  $\psi_{\langle i, j \rangle}$  ist nicht total, so Widerspruch wie in 1).

## Approximationen

Ähnlich wie im letzten Beweis kann man beliebige rek. aufzählbare Mengen  $W_e$  approximieren:

Für alle  $s$  sei  $W_{e,s} \subseteq \{0, 1, \dots, s\}$ , z.B. (am einfachsten) durch Schnittbildung, d.h.  $W_{e,s} = W_e \cap \{0, 1, \dots, s\}$ ,

oder auch durch die Festlegung, dass  $W_{e,s}$  diejenigen Elemente von  $W_e$  enthält, die in höchstens  $s$  Schritten von  $h_e$  aufgezählt werden.

Im Übrigen ist dann in beiden Fällen folgende Menge primitiv rekursiv:

$$\{\langle e, x, s \rangle \mid x \in W_{e,s}\}$$

Im Folgenden **Frage**: (Wann) gibt es injektive (also wiederholungsfreie) berechenbare Aufzählungen (**Nummerierungen**) für Teilmengen aller rekursiv aufzählbarer Mengen?

## Beispiel 1

für ein Mengensystem mit Nummerierung, aber ohne wiederholungsfreie Aufzählung

$$L_{2x} = \begin{cases} \{2x\} & \text{falls } x \notin \mathcal{K}; \\ \{2x, 2x + 1\} & \text{falls } x \in \mathcal{K}; \end{cases}$$
$$L_{2x+1} = \begin{cases} \{2x + 1\} & \text{falls } x \notin \mathcal{K}; \\ \{2x, 2x + 1\} & \text{falls } x \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

Die Nummerierung  $L_0, L_1, L_2, \dots$  ist nicht wiederholungsfrei, denn jede Menge  $\{2x, 2x + 1\}$  mit  $x \in \mathcal{K}$  besitzt zwei Indizes.

Wäre  $H_0, H_1, H_2, \dots$  eine wiederholungsfreie Aufzählung dieser abzählbaren Menge, so wäre  $\mathcal{K}$  entscheidbar: Sei  $f$  die berechenbare Funktion, die zu  $y$  den eindeutig bestimmten Index  $e$  mit  $y \in H_e$  heraussucht.

$$x \in \mathcal{K} \Leftrightarrow f(2x) = f(2x + 1)$$

**Beispiel 2:** für ein Mengensystem mit wiederholungsfreier Nummerierung

Es gibt wiederholungsfreie Nummerierung  $H_0, H_1, H_2, \dots$  aller endlichen Mengen von ungerader Mächtigkeit.

Zu jedem  $e$  bestimme eine Binärdarstellung  $e = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n}$ , wobei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  verschiedene natürliche Zahlen sind.

$$H_e = \begin{cases} \{x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1\} & \text{falls } n \text{ ungerade;} \\ \{0, x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1\} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bsp.:  $H_0 = \{0\}$ ,  $H_1 = \{1\}$ ,  $H_{37} = \{1, 3, 6\}$  und  $H_{39} = \{0, 1, 2, 3, 6\}$   
denn 0 lässt sich als leere Summe darstellen,  $1 = 2^0$ ,  $37 = 2^0 + 2^2 + 2^5$  und  $39 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^5$ .

$H_0, H_1, H_2, \dots$  ist die gewünschte Nummerierung.  
Wie berechnet man  $e$ , wenn die Menge vorliegt?



## Der Satz von Kummer

**Satz** 4. Es seien  $L_0, L_1, L_2, \dots$  und  $H_0, H_1, H_2, \dots$  zwei Nummerierungen, so dass

- $L_a \neq H_b$  für alle  $a, b$  (d.h., die Nummerierungen sind disjunkt);
- $H_a \neq H_b$  sobald  $a \neq b$  (also ist  $H_0, H_1, H_2, \dots$  wiederholungsfrei);
- $\forall a \forall$  endliche  $D \subseteq L_a \exists^\infty b [D \subseteq H_b]$ .

Dann gibt es eine wiederholungsfreie Nummerierung  $F_0, F_1, F_2, \dots$  für das Mengensystem  $\{L_0, L_1, L_2, \dots\} \cup \{H_0, H_1, H_2, \dots\}$ .

## Der Satz von Friedberg

**Satz 5.** Es gibt eine wiederholungsfreie Nummerierung aller rekursiv aufzählbaren Mengen.

Erinnerung: Es gibt wiederholungsfreie Nummerierung  $H_0, H_1, H_2, \dots$  aller endlichen Mengen von ungerader Mächtigkeit.

Beweis: O.E.:  $|W_{e,s+1} - W_{e,s}| \leq 1$  und  $W_{e,0} = \emptyset$  für alle  $e, s$ .

Sei  $L_{e,0} = \emptyset$  und  $L_{e,s+1} = W_{e,s+1}$ , falls  $|W_{e,s+1}|$  gerade, sowie  $L_{e,s+1} = L_{e,s}$  andernfalls.

Durch Induktion folgt:  $|L_{e,s}|$  ist immer gerade, sowie  $|W_{e,s} - L_{e,s}| \leq 1$  für alle  $e, s$ .

Sei  $L_e = \bigcup_s L_{e,s}$ . Die Nummerierung  $L_0, L_1, L_2, \dots$  enthält alle Mengen gerader Mächtigkeit und alle rekursiv aufzählbaren unendlichen Mengen.  $\rightsquigarrow \{H_0, H_1, H_2, \dots\} \cap \{L_0, L_1, L_2, \dots\} = \emptyset$ .

Auf jeder Stufe  $s$  ist  $L_{e,s}$  endlich und  $|L_{e,s}|$  ist gerade.

$\rightsquigarrow \forall d : L_{e,s} \cup \{\max(L_{e,s}) + 1 + d\}$  ist in der Liste  $H_0, H_1, H_2, \dots$  enthalten.

$\rightsquigarrow$  Jede endliche Teilmenge von  $L_a$  besitzt unendlich viele Obermengen  $H_b$ .

Wir können also den Satz von Kummer anwenden.

## Zum Beweis vom Kummerschen Satz (1)

Die Stufen-Konstruktion benutzt zwei Hilfsmengen  $A$  und  $B$ .

$A$  wird eingangs definiert und  $B$  erst während der Konstruktion.

$A$  speichert im Wesentlichen die Information, welche Indizes in der Nummerierung  $L_0, L_1, L_2, \dots$  minimal sind und welche nicht.

Die Menge  $B_s$  speichert alle  $b$ , für die bereits auf Stufe  $s$  ein Index der neuen Aufzählung  $F_0, F_1, F_2, \dots$  gefunden wurde.

Sei  $L_{a,s}$  die Teilmenge derjenigen Elemente aus  $L_a$ , die in  $s$  Schritten aufgezählt worden sind.

Entsprechend verstehe man  $H_{b,s}$ . Definiere

$$\langle a, x \rangle \in A \Leftrightarrow \exists b < a \exists s > x [L_{a,s} \cap \{0, 1, \dots, x\} = L_{b,s} \cap \{0, 1, \dots, x\}].$$

**Klar:**  $\{x \mid \langle a, x \rangle \in A\} = \mathbb{N}$ , falls es ein  $b < a$  gibt mit  $L_b = L_a$ . (Wiederholung!)

## Zum Beweis vom Kummerschen Satz (2)

Betrachte den Fall  $L_b \neq L_a$  für alle  $b < a$ , also  $a$  ist minimaler Index.

$\leadsto$  Zu jedem  $b < a$  gibt es eine Zahl  $y_b$  mit  $L_b(y_b) \neq L_a(y_b)$ .

Außerdem gibt es ein  $t$ , sodass

$t > y_b$  und  $\forall b < a : L_{b,t}(y_b) = L_b(y_b) \neq L_a(y_b) = L_{a,t}(y_b)$ .

$\leadsto \forall b < a \exists y_b \exists t > y_b \forall x > t \forall s > x : x > y_b \wedge L_{b,s}(y_b) \neq L_{a,s}(y_b)$ .

$\leadsto \{x \mid \langle a, x \rangle \in A\}$  ist endlich.

Es gibt (reine Existenz) eine wiederholungsfreie Aufzählung (\*)

$\langle a_0, x_0 \rangle, \langle a_1, x_1 \rangle, \langle a_2, x_2 \rangle, \dots$  von der Menge

$$\{\langle a, x \rangle \mid \forall y < x [\langle a, y \rangle \in A]\}.$$

### Zum Beweis vom Kummerschen Satz (3)

Betrachte  $X = \{\langle a, x \rangle \mid \forall y < x [\langle a, y \rangle \in A]\}$ .

Ist  $a$  nicht minimaler Index von  $L_a$  in der vorgelegten Aufzählung  $(L_i)$ , so gibt es  $b < a$  mit  $L_b = L_a$ , d.h.  $\{x \mid \langle a, x \rangle \in A\} = \mathbb{N}$ , also  $\{\langle a, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ .

Daher gibt es dann gar kein  $\langle a, x \rangle \in X$  mit  $\langle a, x \rangle \notin A$ .

Ist  $a$  minimaler Index von  $L_a$  in  $(L_i)$ , so  $|\{x \mid \langle a, x \rangle \in A\}| < \infty$ .

Sei  $z$  maximal mit  $\forall y < z [\langle a, y \rangle \in A]$ .

(Suche nach längstem “Anfang” in der endlichen Projektionsmenge.)

Per def. gilt für dieses  $z$ :  $\langle a, z \rangle \notin A$ , aber für die  $y < z$  ist:  $\langle a, y \rangle \in A$ .

Für  $\langle a_c, x_c \rangle$  aus der Aufzählung gilt:

Wenn wir  $L_{a_c}$  nur aufzählen, sobald  $\langle a_c, x_c \rangle \notin A$ ,

so erzwingen wir wiederholungsfreie Aufzählung von  $(L_i)$ .

## Zum Beweis vom Kummerschen Satz (4)

Nun konstruiert man die gewünschte Nummerierung  $F_0, F_1, F_2, \dots$  und parallel dazu die Menge  $B$  zu Buchhaltungszwecken.

### Grundideen:

$F_{2c}$  wird  $L_{a_c}$ , falls  $\langle a_c, x_c \rangle \notin A$ .

Falls  $\langle a_c, x_c \rangle$  in  $A$  enthalten ist, wird der Aufzählungsprozess von  $F_{2c}$  angehalten. Stattdessen wird eine Menge  $H_{d_c}$  gesucht, die bislang noch keiner Menge  $F_{c'}$  zugewiesen wurde.

Man setzt in dem Fall  $F_{2c} = H_{d_c}$ .

$B$  vermerkt auf Stufe  $s$  die Indizes aller  $H_0, H_1, H_2, \dots$ , die bereits zu  $F_{c'}$  zugewiesen wurden.

## Die Stufenkonstruktion (1)

Die Konstruktion der Aufzählung  $F_0, F_1, \dots$  erfolgt nun in Stufen.

Auf Stufe  $s$  werden Mengen  $F_{c,s+1}$  konstruiert, die Teilmengen von  $F_c$  sind und zusammen genommen  $F_c$  ergeben.

Ebenso ergibt sich  $B = \bigcup_s B_s$ .

Anfangs seien  $B_0 = \emptyset$  und  $F_{c,0} = \emptyset$  für alle  $c$ .

Die Konstruktion von Stufe  $s$  ist wiederum induktiv, was formal daran zu sehen ist, dass  $s = \langle c, t \rangle$  betrachtet wird. Dies bedeutet, dass man sich um die Mengen  $F_{2c}$  und  $F_{2c+1}$  "kümmert", wobei  $t$  die Stufen von  $H_{b,t}$  durchläuft.

- Stufe  $s = \langle c, 0 \rangle$ . Konkret für  $s = 0$ :  $c = 0$ .  
Sei  $b_c = \min(\mathbb{N} \setminus B_s)$ . Konkret für  $s = 0$ :  $b_c = 0$ .  
Sei  $F_{2c,s+1} = L_{a_c,0}$ .  $a_c$  aus der Aufzählung (\*)  
Sei  $F_{2c+1,s+1} = H_{b_c,0}$ .  
Sei  $B_{s+1} = B_s \cup \{b_c\}$ . Also  $B_1 = \{0\}$ .

## Die Stufenkonstruktion (2)

- Stufe  $s = \langle c, t \rangle$  mit  $t > 0$ .  
Sei  $F_{2c+1,s} = H_{b_c,t}$ .  
Überprüfe ob  $\langle a_c, x_c \rangle \in A_t$  und unterscheide drei Fälle.
  - Fall  $\langle a_c, x_c \rangle \notin A_t$ .  
Setze  $F_{2c,s+1} = L_{a_c,t}$ .  
Setze  $B_{s+1} = B_s$ .
  - Fall  $\langle a_c, x_c \rangle \in A_t$  und  $t = \min\{t' \mid \langle a_c, x_c \rangle \in A_{t'}\}$ .  
Sei  $\langle d_c, u_c \rangle$  das erste Paar, sodass  $d_c \notin B_s$  und  $F_{2c,s} \subseteq H_{d_c,u_c}$ .  
Setze  $F_{2c,s+1} = H_{d_c,\max(\{u_c,t\})}$ .  
Setze  $B_{s+1} = B_s \cup \{d_c\}$ .
  - Fall  $\langle a_c, x_c \rangle \in A_t$  und  $t > \min\{t' \mid \langle a_c, x_c \rangle \in A_{t'}\}$ .  
Seien  $d_c, u_c$  wie soeben definiert.  
Setze  $F_{2c,s+1} = H_{d_c,\max(\{u_c,t\})}$ .  
Setze  $B_{s+1} = B_s$ .

Sei schließlich  $F_{c',s+1} = F_{c',s}$  für alle  $c' \notin \{2c, 2c + 1\}$ .



## Die Stufenkonstruktion (3) Warum klappt die Konstruktion?

1. Jede Menge  $H_b$  erscheint in der Aufzählung genau einmal.

Jedes  $b \in B$  ist Index einer Menge  $H_b$ , wie sie in der Aufzählung  $F_0, F_1, F_2, \dots$  erscheint.

Auf Stufe  $s = \langle c, 0 \rangle$  wird die kleinste Zahl außerhalb von  $B_s$  zu  $B_{s+1}$  hinzugefügt.

$F_e$  wird  $H_b$  genau auf der Stufe  $s$ , in der  $b$  zu  $B$  hinzukommt.

Dies geschieht für jedes  $b$  genau einmal.

2. Jede Menge  $L_a$  erscheint in der Aufzählung genau einmal, nämlich als  $F_{2c} = L_a$ .

Betrachte Index  $a$ . Hierzu gibt es eine kleinste Zahl  $a'$  mit  $L_{a'} = L_a$ .

Darüber hinaus gibt es eine maximale Zahl  $x'$  mit  $\langle a', x' \rangle = \langle a_c, x_c \rangle$  für ein  $c$ .

(Man beachte wieder die Aufzählung (\*).)

Für dieses  $c$  gilt:  $\langle a_c, x_c \rangle \notin A \rightsquigarrow F_{2c} = L_a$ .

Außerdem gilt für alle  $c' \neq c$  mit  $a_{c'} = a_c$ :  $\langle a_{c'}, x_{c'} \rangle \in A$ .

Es gibt ein erstes  $t$  mit  $\langle a_{c'}, x_{c'} \rangle \in A_t$  und die Menge  $F_{2c',s}$  mit  $s = \langle c', t \rangle$  ist eine endliche Teilmenge von  $L_a$ .

Aus der dritten Voraussetzung des Satzes folgt, dass die Suche nach dem zugehörigen  $d_{c'}$  terminiert und  $F_{a_{c'}, x_{c'}} = H_{d_{c'}}$ , also  $F_{a_{c'}, x_{c'}} \notin \{L_0, L_1, L_2, \dots\}$ .

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass  $F_0, F_1, F_2, \dots$  das folgende Mengensystem wiederholungsfrei aufzählt:  $\{L_0, L_1, L_2, \dots\} \cup \{H_0, H_1, H_2, \dots\}$ .

## Noch mehr zu Nummerierungen

**Zur Übung:** Sei  $A$  rekursiv aufzählbar mit unendlichem Komplement. Betrachte das durch folgende Nummerierung definierte Mengensystem  $\mathcal{L} = \{L_0, L_1, L_2, \dots\}$ :  
 $L_x = A$  für  $x \in A$  und  $L_x = \{x\}$  für  $x \notin A$ .

Beweise:  $\mathcal{L}$  hat eine wiederholungsfreie Nummerierung gdw.  $A$  ist entscheidbar.

**Satz 6.** Keine Friedberg-Nummerierung ist akzeptabel.

Beweis: Sei  $H_0, H_1, H_2, \dots$  eine Friedberg Nummerierung (aller rek. aufzählbaren Mengen). Betrachte die Nummerierung  $L_0, L_1, L_2, \dots$  aus oben stehender Übung mit  $A = \mathcal{K}$ .

Das bedeutet:  $L_x = \mathcal{K}$  für  $x \in \mathcal{K}$ ,  $L_x = \{x\}$  für  $x \notin \mathcal{K}$ .

Wäre  $H_0, H_1, H_2, \dots$  akzeptabel, so gäbe es eine rekursive Funktion  $f$  mit  $L_x = H_{f(x)}$  für alle  $x$ .

Da  $H_0, H_1, H_2, \dots$  wiederholungsfrei, gibt es eindeutigen Index  $e$  mit  $H_e = \mathcal{K}$ .

$\leadsto x \in \mathcal{K} \Rightarrow L_x = \mathcal{K} \Rightarrow f(x) = e$  und  $x \notin \mathcal{K} \Rightarrow L_x = \{x\} \Rightarrow f(x) \neq e$ .

Das würde einen Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  liefern.

## Abschließende Interpretation

Was bedeutet der Satz von Friedberg?

Es gibt demnach (das folgt aus verschärften Formulierungen) keine universelle Programmiersprache (Notation), die vernünftig ist in dem Sinne, dass sie Übersetzungen von / in allgemein akzeptierte universelle Programmiersprachen wie JAVA gestattet, und gleichzeitig gewährleistet, dass jede Programmieraufgabe (formalisiert durch die Spezifikation einer zu berechnenden Funktion) nur eine Lösung gestattet, also nur ein Programm zulässt, das diese Aufgabe erfüllt.

Wir müssen also damit leben, dass Aufgaben unterschiedliche, jedoch jeweils korrekte Lösungen (Programm-Umsetzungen) besitzen.

## Zur Literatur

Klassische Rekursionstheorie wird durch zahlreiche Bücher abgedeckt, am vollständigsten wohl durch das mehrbändige Werk von Odifreddi.

Ich entnehme jetzt und im Folgenden häufiger Anleihen bei:

<http://www.comp.nus.edu.sg/~fstephan/recursiontheory-pdflatex.pdf>