Datenkompression: Skalarquantisierung

H. Fernau

email: fernau@uni-trier.de

SoSe 2011

Universität Trier

(Skalar-)Quantisierung—Allgemeines

Problem: Die Ausgabe einer Quelle muss durch eine endliche „kleine" Menge $\mathcal{C}$ von Codewörtern dargestellt werden, obwohl diese Ausgabe Werte aus einer sehr viel größeren, möglicherweise unendlichen Menge $\mathcal{A}$ annehmen kann.

Die Quantisiervorschrift liefert also eine o. E. surjektive Abbildung $Q_C : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$.

Skalarquantisierung: speziell Darstellung von Zahlen (Intervallen)

Da die **Güte der Codierung** (Kompressionsrate / Verzerrung) sowohl von Q_C als auch von der Decodiervorschrift $Q_D : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ abhängt, begreifen wir unter einem *Quantisierer* das Paar (Q_C, Q_D). Das Verhalten eines Quantisierers lässt sich durch seine Ein/Ausgabefunktion

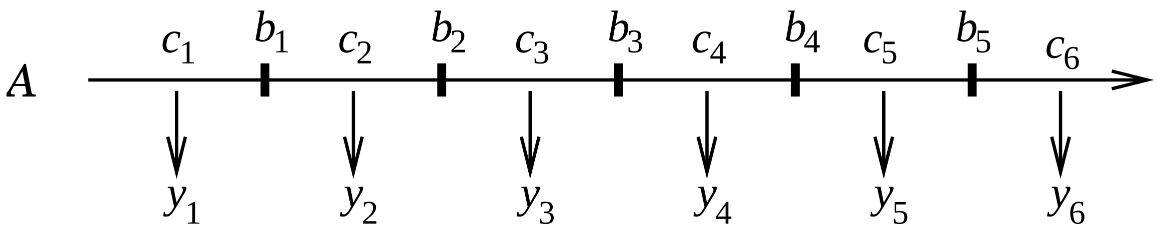
$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto Q_D(Q_C(x))$$

veranschaulichen.

Skalarquantisierung: konkret

Das Problem:

1. Für geg. $\mathcal{A}$ und M finde Intervalle $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_M$.
2. Finde Codes für die Intervalle $c_1, c_2, \ldots, c_M$.
3. Definiere Repräsentanten $y_1, y_2, \ldots, y_M$.

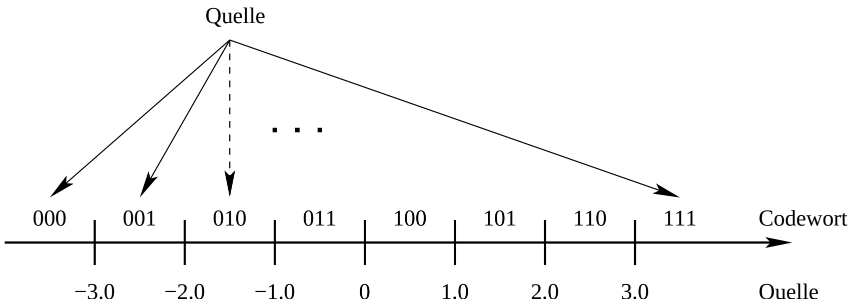


Quantisierer Q ist das Paar (Q_C, Q_D):

$$Q_C : \mathcal{A} \to \mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_M\} \quad Q_D : \mathcal{C} \to \mathcal{A}.$$

$Q_D(Q_C(x))$ bezeichnen wir mit $Q(x)$.

Beispiel



Eine 3-Bit-Quantisiervorschrift

Codewort	Repräsentant
000	-3.5
001	-2.5
010	-1.5
011	-0.5
100	0.5
101	1.5
110	2.5
111	3.5

Die Decodiervorschrift Q_D

t	$4\cos(2\pi t)$	A/D Ausgabe	D/A Ausgabe	Abweichung
0.05	3.804	111	3.5	0.304
0.10	3.236	111	3.5	-0.264
0.15	2.351	110	2.5	-0.149
0.20	1.236	101	1.5	-0.264

Die Abtastung einer Cosinuswelle

Quantisieraufgabe

Die *Quantisier(ungs)aufgabe* besteht darin, einen Quantisierer Q mit dem Ziel zu entwerfen,

- die Rate R (also die durchschnittliche Anzahl Bits, die für die Repräsentation eines Elementes aus $\mathcal{C}$ benötigt wird) **und**

- den mittleren quadratischen Fehler σ_Q^2

zu minimieren.

Etwas Mathematik... Es werde nun die Quellenstatistik durch eine Zufallsgröße X mit **Wahrscheinlichkeitsdichte** f_X modelliert.

Quantisierung mit M Intervallen:

$$|C| = M \text{ mit } C = \{1, \ldots M\},$$

Problem: finde *Entscheidungsgrenzen* (Intervallendpunkte)

$$b_0, b_1, \ldots, b_M$$

sowie die Intervallrepräsentanten

$$y_1, \ldots, y_M$$

($b_0 = -\infty$ und $b_M = +\infty$). In unserer vorigen Notation ist daher für $1 \leq i \leq M$:

$$Q(x) = y_i \text{ genau dann, wenn } x \in (b_{i-1}, b_i].$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_Q^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 f_X(x) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

- Codewörter fester gleicher Länge ($R = \lceil \log M \rceil$).
- Codewörter **nicht** fester gleicher Länge.

$P(y_i)$ – W. des Auftretens von y_i. Wegen $P(y_i) = \int_{b_{i-1}}^{b_i} f_X(x)dx$ gilt

$$R = \sum_{i=1}^{M} \ell_i P(y_i) = \sum_{i=1}^{M} \ell_i \int_{b_{i-1}}^{b_i} f_X(x)dx, \qquad (2)$$

wobei ℓ_i die Länge des y_i entsprechenden Codewortes ist.

Im allgemeinen stellen sich daher zwei Optimierungsaufgaben:

1. Ist eine Verzerrungsschranke $D^* \geq \sigma_Q^2$ vorgegeben, so ist die Rate gemäß Gleichung (2) zu minimieren.

2. Ist eine Ratenschranke $R^* \geq R$ vorgegeben, so ist die Verzerrung nach Gleichung (1) zu minimieren.

Da die Entropie des Quantisierers durch

$$H = -\sum_{i=1}^{M} P(y_i) \log_2(P(y_i)) \qquad (3)$$

gegeben ist, kann man auch noch eine dritte Quantisieraufgabe stellen:

3. Ist eine Entropieschranke $H^* \geq H$ vorgegeben, so ist die Verzerrung nach Gleichung (1) zu minimieren.

Codewörter fester gleicher Länge

Sind f_X und M vorgegeben und geht man von Codewörtern fester gleicher Länge aus, so besteht die Quantisierungsaufgabe darin, die Parameter $b_0, \ldots, b_M; y_1, \ldots y_M$ so zu wählen, daß σ_Q^2 gemäß Gleichung (1) minimiert wird. Es gilt: $R = \lceil \log M \rceil$.

Gleichquantisierer **(Uniform Quantizer)**:

alle Intervalle (mit Ausnahme evtl. der äußeren Intervalle) sind gleich groß

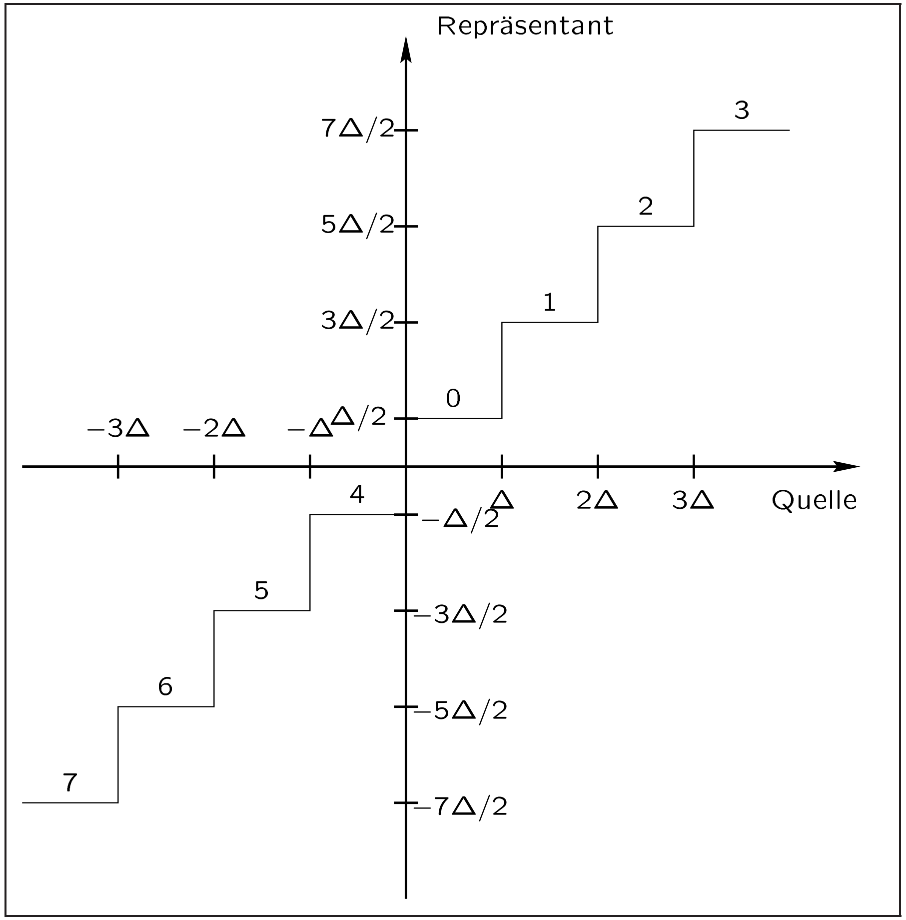
$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = \ldots = b_{M-1} - b_{M-2} = \Delta$$

und als Intervallrepräsentanten sind die Mittelpunkte dieser (inneren) Intervalle genommen werden.

Das Problem

Für Intervallrepräsentanten – die Mittelpunkte der (inneren) Intervalle und $M = |\mathcal{C}|$ finde *Schrittweite* Δ, die Verzerrung σ_Q^2 minimiert.

Die Ein/Ausgabefunktion eines 3-Bit-Quantisierers



Ein **Gleichquantisierer** für eine

im Intervall $[-X_{\text{max}}, X_{\text{max}}]$ gleichverteilte Quelle
mit Hilfe von M Intervallen (M gerade).

Damit gilt:

$$\Delta = \frac{2X_{\text{max}}}{M}, \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2X_{\text{max}}}, & x \in [-X_{\text{max}}, X_{\text{max}}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sigma_Q^2 = 2\sum_{i=1}^{M/2} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} (x - \frac{2i-1}{2}\Delta)^2 \frac{1}{2X_{\text{max}}} dx = \ldots = \frac{\Delta^2}{12}$$

Nun berechnen wir das Verhältnis von Signal zur Verzerrung. Es gilt $E[X] = 0$, d.h., der mittlere quadratische Wert der Quelle $E[X^2]$ ist gleich der Varianz, also ist $\sigma_X^2 = \frac{(2X_{\text{max}})^2}{12}$. Daher ist:

$$\begin{aligned} SNR(dB) &= 10\log_{10}(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2}) \\ &= 10\log_{10}\frac{(2X_{\text{max}})^2/12}{(\frac{2X_{\text{max}}}{M})^2/12} \\ &= 6.02(\log_2 M)\ dB. \end{aligned}$$

Die **Annahme der Gleichverteilung** ist tatsächlich meist *falsch* (Bilder haben meist Häufungen bei gewissen Grauwerten.), ebenso die der Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Ereignisse (Benachbarte Pixel sind häufig gleich.).

Ein *Gleichquantisierer* für eine Quelle X mit **beliebiger** Wahrscheinlichkeitsdichte f_X: (f_X ist bezüglich des Ursprungs symmetrisch.)

Für gerade M ist zu minimieren:

$$\begin{aligned}\sigma_Q^2 &= 2\sum_{i=1}^{M/2-1}\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta}\left(x-\frac{2i-1}{2}\Delta\right)^2 f_X(x)dx\\&+ 2\int_{(M/2-1)\Delta}^{\infty}\left(x-\frac{M-1}{2}\Delta\right)^2 f_X(x)dx,\end{aligned}$$

was durch Nullsetzen der Ableitung $\frac{d\sigma_Q^2}{d\Delta}$ geschehen kann.

Optimale Schrittweiten für Gleichquantisierer

Alph.-größe	Gleichverteilung Schrittweite	Gleichverteilung SNR	Gaußverteilung Schrittweite	Gaußverteilung SNR	Laplaceverteilung Schrittweite	Laplaceverteilung SNR
2	1.732	6.02	1.596	4.40	1.414	3.00
4	0.866	12.04	0.9957	9.24	1.0873	7.05
6	0.577	15.58	0.7334	12.18	0.8707	9.56
8	0.433	18.06	0.5860	14.27	0.7309	11.39
10	0.346	20.02	0.4908	15.90	0.6334	12.81
12	0.289	21.60	0.4238	17.25	0.5613	13.98
14	0.247	22.94	0.3739	18.37	0.5055	14.98
16	0.217	24.08	0.3352	19.36	0.4609	15.84
32	0.108	30.10	0.1881	24.56	0.2799	20.46

Der Einfluß von Verteilungsannahmen auf SNR: Was passiert bei Irrtum?

Eingabeverteilung	Gleichverteilung	Gaußverteilung	Laplaceverteilung
Gleich-	18.06	15.56	13.29
Gauß-	12.40	14.27	13.37
Laplace-	8.80	10.79	11.39

Adaptive Quantisierung

1. Voradaptierung,

2. Rückadaptierung.

Voradaptierung ist ein typisches „off-line"-Verfahren.
Die Ausgabe der Quelle wird in Blöcke unterteilt, deren Statistik separat analysiert wird; gemäß dieser Analyse werden die Quantisierparameter gesetzt.
Nachteil: Verzögerung der Übertragung durch den Puffer-Effekt
Andererseits: ein langer Puffer erlaubt eine gute Verteilungsanalyse.
weiterer Nachteil: Die so ermittelteten Parameter müssen als *Begleitinformationen* mit übertragen werden.

Rückadaptierung *Jayant-Quantisierer*

```
while (x_n = readsample())
    if x_n ∈ [b_{i-1}, b_i) then Δ_{n+1} = M_i · Δ_n;
    if Δ_{n+1} < Δ_min then Δ_{n+1} = Δ_min;
    if Δ_{n+1} > Δ_max then Δ_{n+1} = Δ_max;
```

Jayant-Quantisierer mit Faktoren

$$
\begin{array}{ccccc}
M_0 & = & M_4 & = & 0,8 \\
M_1 & = & M_5 & = & 0,9 \\
M_2 & = & M_6 & = & 1 \\
M_3 & = & M_7 & = & 1,2
\end{array}
$$

und der Anfangsschrittweite $\Delta_0 = 0,5$:
Anfangs ist also M_i, $0 \leq i \leq 3$, für das Intervall $[i\Delta, (i+1)\Delta)$ zuständig, und entsprechend im negativen Bereich, z.B. M_4 für $[-\Delta, 0)$.

Zur **Arbeitsweise eines Jayant-Quantisierers**

n	Δ_n	Eingabe	Code	Repräs.	Abweich.	nächste Schrittw.
0	0,5	0,1	0	0,2500	0,1500	$\Delta_1 = M_0 \times \Delta_0$
1	0,4	-0,2	4	-0,200	0,0000	$\Delta_2 = M_4 \times \Delta_1$
2	0,32	0,2	0	0,1600	0,0400	$\Delta_3 = M_0 \times \Delta_2$
3	0,256	0,1	0	0,1280	0,0280	$\Delta_4 = M_0 \times \Delta_3$
4	0,2048	-0,3	5	-0,3072	-0,0072	$\Delta_5 = M_5 \times \Delta_4$
5	0,1843	0,1	0	0,0922	-0,0078	$\Delta_6 = M_0 \times \Delta_5$
6	0,1475	0,2	1	0,2212	0,0212	$\Delta_7 = M_1 \times \Delta_6$
7	0,1328	0,5	3	0,4646	-0,0354	$\Delta_8 = M_3 \times \Delta_7$
8	0,1594	0,9	3	0,5578	-0,3422	$\Delta_9 = M_3 \times \Delta_8$
9	0,1913	1,5	3	0,6696	-0,8304	$\Delta_{10} = M_3 \times \Delta_9$
10	0,2296	1,0	3	0,8036	0,1964	$\Delta_{11} = M_3 \times \Delta_{10}$
11	0,2755	0,9	3	0,9643	0,0643	$\Delta_{12} = M_3 \times \Delta_{11}$

Wie wählt man die Faktoren M_i?

Faustregel: Je mehr sich die Faktoren von Eins unterscheiden, desto rascher reagiert der Jayant-Quantisierer.
Eine zu rasche Reaktion kann allerdings zu Instabilitäten führen.
Geht man von einem *stationären Eingabeprozess* aus, bei dem schließlich die Wahrscheinlichkeiten, mit einer einzelnen Eingabe im i-ten Intervall zu landen, P_i beträgt, so sollten die P_i der Gleichung

$$\prod_{i=1}^{M} M_i^{P_i} = 1$$

genügen.

Zwei Warnungen zu adaptiven Verfahren:

- Kennt man die Quellenstatistik genau, so ist ein diesbezüglich optimierter Quantisierer einem adaptiven überlegen. Ganz allgemein ist es bei der Datenkompression essentiell, alle verfügbaren Informationen über die Quelle auszunutzen.

- Wählt man die Adaptionsparameter „ungeschickt" im Hinblick auf die Eingabedaten, so kann es –wie ja allgemein von Reglern bekannt– zu *Schwingeffekten* kommen.

Allgemeine Quantisierer Das Lloyd-Max Verfahren

1. Wähle Anfangsrepräsentanten $\{y_i^{(0)}\}_{i=1}^M$ und Abbruchschwellwert ε für die Verzerrungsdifferenz.
   Setze $D^{(-1)} = 0$, $k = 0$.
2. Berechne neue innere Entscheidungsgrenzen $b_1^{(k)}, \ldots, b_{M-1}^{(k)}$ (und damit die Intervalle) mit:
$$(\forall j = 1, \ldots M-1) \quad b_j^{(k)} = \frac{y_{j+1}^{(k)} + y_j^{(k)}}{2}.$$
3. Berechne die neue Verzerrung
$$D^{(k)} = \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}^{(k)}}^{b_i^{(k)}} (x - y_i)^2 f_X(x)dx.$$
4. Falls $\left|D^{(k)} - D^{(k-1)}\right| < \varepsilon$, STOP.
5. Sonst: Setze $k = k+1$ und berechne neue Repräsentanten als Zentroide:
$$(\forall j = 1, \ldots M) \quad y_j^{(k)} = \frac{\int_{b_{j-1}^{(k-1)}}^{b_j^{(k-1)}} x f_X(x)dx}{\int_{b_{j-1}^{(k-1)}}^{b_j^{(k-1)}} f_X(x)dx}.$$

   Gehe zu Schritt 2.

Idee des Lloyd-Max Verfahrens:
bei bekannter Wahrscheinlichkeitsdichte f_X der Quelle wird versucht, Ausdruck (1) zu minimieren.

$\rightsquigarrow$ wechselseitig rekursives, nicht-lineares Gleichungssystem für die Repräsentanten und Entscheidungsgrenzen, deren Lösung — fußend auf Ideen der Variationsrechnung— unabhängig von einander S. P. Lloyd und J. Max sowie J. Lukaszewicz und H. Steinhaus in den Jahren 1950-1960 angaben.

Zentroide sind eine die Wahrscheinlichkeitsdichte berücksichtigende Verallgemeinerung des Mittelwertbegriffs, wie man sieht, wenn man die Gleichverteilung als Dichte ansetzt; sie lassen sich als normierte Erwartungswerte begreifen.
Evtl. ist es sinnvoll, andere als die äußeren Entscheidungsgrenzen als fest anzunehmen und dann den Algorithmus geeignet abzuwandeln.

Kompressor

Idee: einem Gleichquantisierer wird eine *Kompressor* c genannte Transformation vor- und eine *Expander* e genannte Transformation nachgeschaltet. Ein Beispiel für solche sog. *zusammengesetzten Quantisierer* liefern der Kompressor

$$c(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in [-1,1] \\ \frac{2x}{3} + \frac{4}{3}, & \text{falls } x \in [1,+\infty) \\ \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}, & \text{falls } x \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

und der Expander $e = c^{-1}$. In diesem Fall ist die Schrittweite des Quantisierers Q_C im Intervall $[-1,1]$ kleiner als außerhalb dieses Intervalls, was z. B. bei Gauß- oder Laplace-verteilten Quellen erwünscht ist.

Bei „Zwischenschalten" eines 3-Bit-Gleichquantisierers liefert der so definierte zusammengesetzte Quantisierer das in der folgenden Abb. gezeigte Verhalten Q.

Die von Telefongesellschaften eingesetzten Quantisierer sind zusammengesetzte.

Die Ein/Ausgabefunktion eines zusammengesetzten 3-Bit-Quantisierers