Datenkompression:

Fraktale Kompression

H. Fernau

email: fernau@uni-trier.de

SoSe 2013

Universität Trier

Fraktale Codierung—mathematische Grundgedanken

Statt ein „Datum" zu übertragen, übertrage man die Parameter einer kontrahierenden Abbildung f, deren Fixpunkt eben dieses Datum ist.
Der Decodierer kann nun durch ein einfaches Iterationsverfahren (berechne $y_i = f(y_{i-1})$ ausgehend von einem beliebigen „Punkt" y_0 solange, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht wird) oder schneller noch durch randomisierte Techniken das zu übertragende Datum rekonstruieren.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz funktioniert diese Idee prinzipiell für jeden vollständigen metrischen Raum, zum Beispiel auf dem $\mathbb{R}^2$ mit dem Euklidischen Abstand als Metrik ρ_E.
Iterierte Funktionensysteme (IFS) gestatten die Beschreibung von Bildern als Fix„punkte".

Etwas Mathematik

Es sei (X,ρ) ein metrischer Raum, d.h., ρ ist ein Abstandsmaß (eine Metrik) auf der Menge X.
Die *r-Umgebung* von $A \subseteq X$ ist gegeben durch:

$$B_r(A) := \{y \in X \mid (\exists x \in A)(\rho(x,y) < r)\} (= \bigcup_{x\in A} B_r(x)).$$

Bezeichne $\mathcal{K}(X,\rho)$ die Menge aller nicht leeren aber kompakten Teilmengen von (X,ρ) (z.B. folgenkompakt).
In $(\mathbb{R}^2,\rho_E)$ gilt: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt gdw. A abgeschlossen und beschränkt.
Es seien $A,B \in \mathcal{K}(X,\rho)$. Die Abbildung

$$\rho_H(A,B) := \inf\{r : A \subseteq B_r(B) \text{ und } B \subseteq B_r(A)\}$$

ist eine Metrik auf $(\mathcal{K}(X,\rho),\rho_H)$. Sie heißt *Hausdorff-Metrik* oder *Hausdorff-Abstand*.

Iterierte Funktionensysteme (IFS)

Eine Abbildung $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ heißt *Ähnlichkeitsabbildung* gdw.

$$\rho_Y(f(x), f(x')) = \alpha\rho_X(x, x').$$

α heißt auch *Ähnlichkeitsfaktor*.
Gilt $\alpha < 1$, so heißt f *kontrahierend*.
Allgemeiner gilt $\rho_Y(f(x), f(x')) \leq \alpha\rho_X(x, x')$ für ein $\alpha < 1$ für eine *Kontraktion*.

Ein *IFS* F (auf X), ist gegeben durch eine endliche Liste $F = (F(1), \ldots, F(n))$ von kontrahierenden Ähnlichkeitsabbildungen, i.e., $F(i) : X \to X$.
Zugeordnet ist die *Liste der Ähnlichkeitsfaktoren* $(r_{F(1)}, \ldots, r_{F(n)})$.

Was IFS beschreiben

Jedes IFS $F = (F(1), \ldots, F(n))$ auf (X, ρ) lässt sich als Abbildung $\mathcal{K}(X,\rho) \to \mathcal{K}(X,\rho)$ auffassen durch

$$F(A) := \bigcup_{i=1}^{n} F(i)(A).$$

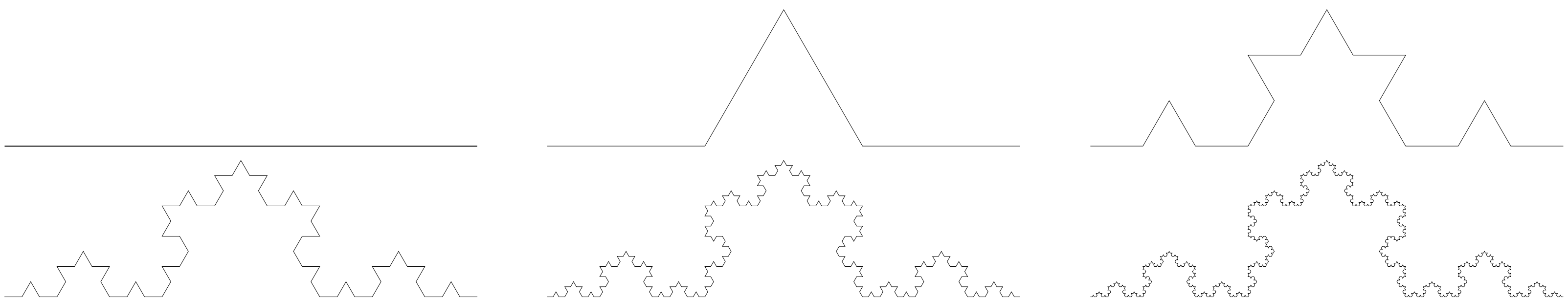
F ist so eine Kontraktion auf $(\mathcal{K}(X,\rho), \rho_H)$ mit einem Kontraktionsfaktor $r_F := \max_{i=1}^{n} r_{F(i)} < 1$.
Nach dem *Banachschen Fixpunktsatz* bestimmt F so eindeutig einen Fix„punkt” $A_F \in \mathcal{K}(X,\rho)$, falls (X,ρ) (und damit $(\mathcal{K}(X,\rho), \rho_H)$) vollständig ist (d.h., Cauchy-Folgen konvergieren).

Da sich der Abstand des Fixpunktes x_f einer kontrahierenden Abbildung f (mit Kontraktionsfaktor r_f) auf einem vollständigen metrischen Raum (X,ρ) von einem beliebigen Punkt $x \in X$ durch $(\rho(x, x_f) \leq \frac{1}{1-r_f} \cdot \rho(x, f(x)))$ abschätzen lässt, ist die n-te Iterierte $f^n(x)$ höchstens $\frac{r_f^n}{1-r_f} \cdot \rho(x, f(x))$ vom Fixpunkt entfernt (*Collage-Theorem*)
$\leadsto$ eine recht einfache Abschätzung des ansonsten nicht so einfach zu bestimmenden Hausdorff-Abstandes;
überdies: schnelles Abbruchkriterium bei der Decodierung „fraktalen Codes”.

Als Beispiel betrachten wir die *Koch-Kurve*, als Raum nehmen wir $X = [0,1] \times [0,1]$ mit der Euklidischen Metrik und als IFS $F = (F(1), F(2), F(3), F(4))$, wobei die einzelnen Abbildungen wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned}
F(1)(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\
F(2)(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
F(3)(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
F(4)(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\sin(60^\circ) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Deutlichkeit halber wollen wir in der unteren Abb. mit der kompakten Menge $\{(x,0) | 0 \leq x \leq 1\}$ starten. Beachte, dass der Hausdorff-Abstand der fünften Iteration von der Koch-Kurve sich mit $\frac{1}{3^5(1-1/3)}\frac{1}{3} \approx 0,002$ abschätzen lässt.



Diskussion

Wie auch anhand der Koch-Kurve deutlich wird, haben IFS-Fraktale stets eine *selbstähnliche Struktur*, die zwar ansatzweise –wie B. Mandelbrot herausgearbeitet hat– sich auch „in der Natur" und damit auch bei natürlichen Bildern anzutreffen ist, sicher aber nicht in der durch IFS bedingten „Reinkultur".
Andererseits wird die wesentliche Idee eines auf „Selbstähnlichkeit" abhebenden Kompressionsverfahrens klar:
Die Übertragung der viermal je 6 Zahlen, die jeweils die affinen Abbildungen der Koch-Kurve spezifieren, ist wesentlich effizienter als die Übertragung beispielsweise des PS-Files der letzten auf der vorigen Folie gezeigten Approximation.

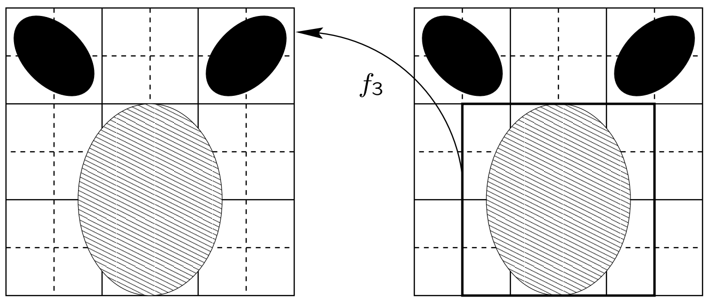
Sind Bilder wie angedeutet fraktal zu codieren, so ergibt sich ein Problem: Wie sind zu einem gegebenen Bild die Parameter einer es spezifizierenden Schar von affinen Abbildungen zu generieren ?

Fraktale Kompression

Eine erste praktikable Lösung dieser Probleme stammt von A. Jacquin. Hierbei wird zunächst das Bild in sog. *Bereichsblöcke* R_k unterteilt. Für jeden Bereichsblock wird im Bild selbst ein *Urbild-block* D_k (und eine vermittelnde kontrahierende Abbildung f_k mit $R_k = f_k(D_k)$) gesucht. Die Urbildblöcke erhält man, indem man ein $K \times K$-Fenster mit Schrittweite $K/2$ oder $K/4$ über das Bild gleiten lässt und das „günstigste" Teilbild D_k auswählt, s. Bild unten.
Da nicht immer die Existenz eines optimalen Urbilds gewährleistet ist, handelt man sich hierbei einen systematischen Fehler ein, der dieses Verfahren verlustbehaftet macht.

Bereichsblock-Ähnlichkeit

Tatsächlich wird der Unterschied von R_k zu $f_k(D_k)$ nicht per Hausdorff-Abstand, sondern durch eines der früher diskutierten Verzerrungsmaße bestimmt.
Man kann zeigen, dass mit den (partiell definierten) Funktionen f_k die zugehörige mengenwertige Funktion $F(A) = \bigcup_k f_k(A)$ kontrahierend ist und somit die für IFS gemachten Überlegungen auch hier gelten.



Farbbilder

Bislang haben wir uns lediglich um Schwarz-Weiß-Bilder in unseren Überlegungen gekümmert.
Tatsächlich gilt das Gesagte im Wesentlichen auch für Grauwert- bzw. Farbbilder;
hier kommt dann noch eine Anpassung der Farbinformation hinzu, so wie die Abbildung f_3 im Bild nicht nur ein Verschieben und Drehen, sondern auch eine Grauwertanpassung beinhaltet.
Nach Jacquin wird f_k durch $f_k = m_k \circ g_k$ zerlegt, wobei g_k eine Verschiebung und Skalierung bewirkt und m_k eine Transformation der Masse.
Ist –genauer– $T_k = g_k(D_k)$ und bezeichnet t_{ij}, $i, j \in \{0, \ldots, M-1\}$, das (i, j)-te Pixel in T_k, so ist $m_k(t_{ij}) = \alpha_k t_{I_k(i,j)} + \Delta_k$.
$\alpha_k t + \Delta_k$ bezeichnet dabei eine Grauwertanpassung.
I_k ist eine Isometrie, die man als Permutation der Pixel innerhalb von T_k auffassen kann.

Konkret betrachtet man die folgenden Isometrien:

- vier Drehungen um 0, 90, 180 und 270 Grad und
- vier Spiegelungen an der vertikalen und horizontalen Spiegelachse sowie an den beiden Diagonalen.

Zur Darstellung von R_k benötigt man so g_k, α_k, Δ_k und I_k.
In der Praxis schränkt man die Wahl der α_k-Werte noch drastisch ein, und häufig betrachtet man lediglich die Identität für I_k.
Dennoch bleibt die Bestimmung der Parameter ein erhebliches Rechenproblem:
Mitteilung: Das Problem optimaler Blockzuordnung ist NP-hart.
$\leadsto$ verschiedendste heuristische Lösungsansätze, in der unterschiedliche auch hier besprochene Methoden wie Vektorquantisierung, Fouriertransformation und Adaption in fraktale Komprimierungsschemata eingebaut werden.