11. Übungsblatt	Diskrete Strukturen	WS 2012/13

Abgabe bis Freitag, 18.1.2013, 8 Uhr beim DS-Kasten im 4. OG vor Sekretariat Näher. Die Aufgaben werden in derselben Woche in den Übungen besprochen.

1. Aufgabe: *(3+1 Punkte)*
Wir betrachten Zufallsexperimente mit zwei fairen aber farblich unterscheidbaren Würfeln $W^{\text{grün}}$ und $W^{\text{weiß}}$. Für jeden Würfel gibt es also sechs mögliche, gleich wahrscheinliche Versuchsausgänge aus $E_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Als Ereignisraum für das Werfen mit zwei Würfeln können wir also $S = E_6 \times E_6$ wählen. Wir betrachten die Zufallsgröße $X : S \to \mathbb{R}$, $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$.

1. Bestimmen Sie $P[X = r]$ für $r = 1, 2, \ldots, 12$.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

2. Aufgabe: *(4 Punkte)*
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine an einer bestimmten Krankheit K leidende Person durch ein bestimmtes Medikament geheilt wird, betrage 70%. Das Medikament wird an 10 an K erkrankte Personen verabreicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens die Hälfte der Patienten geheilt? Diskutieren Sie auch eingangs, welche Art wahrscheinlichkeitstheoretischer Modellierung Sie warum gewählt haben.

3. Aufgabe: *(5+1+2 Punkte)*
Wir setzen die erste Aufgabe fort. Wir wollen das Werfen von je zwei Würfeln solange fortsetzen, bis wir uns entweder dazu entschließen, nicht mehr weiterzumachen (in dem Fall wird uns die Anzahl der Würfe als "Gewinn" in Euro ausgezahlt) oder bis wir eine Würfelsumme erreichen, die wie schon erzielt hatten; dann erhalten wir allerdings keinen einzigen Cent .... Wir müssen uns also vor jedem einzelnen Wurf (mit zwei Würfeln) überlegen, ob sich das Risiko noch lohnt.
Das können wir wie folgt modellieren: Zu einem gewissen Zeitpunkt wurde bereits eine Menge Y von Würfelaugensummen erreicht. Y beschreibt also eine konkrete Situation im Spiel.
Zu jeder Teilmenge $Y \subset \{2, 3, \ldots, 12\}$ sei eine Zufallsgröße $X_Y : S \to \mathbb{R}$ wie folgt angegeben:

$$X_Y((w_1, w_2)) = \begin{cases} |Y| + 1, & \text{falls } X((w_1, w_2)) = w_1 + w_2 \notin Y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Erwartungswert ist $E(X_Y)$. Gilt $|Y| > E(X_Y)$, so lohnt sich das Risiko (wohl) nicht, in der durch Y beschriebenen Situation noch einmal zu den Würfeln zu greifen.

1. Bestimmen Sie, ob es sich lohnt weiterzumachen, in den folgenden konkreten Situationen:
   $Y_1 = \{2, 3, 4, 5\}$, $Y_2 = \{1, 2, 11, 12\}$, $Y_3 = \{6, 7\}$, $Y_4 = \{1, 6, 7\}$, $Y_5 = \{4, 6, 11\}$.
2. Begründen Sie die Richtigkeit der "Daumenregel": "Ich würfele immer mindestens zweimal."
3. Nehmen wir einmal an, ein Spielcasino möchte das in dieser Aufgabe ja auch als Geldspiel skizzierte Würfelspiel anbieten. Das Spielcasino muss natürlich das Spiel erstmal analysieren, um herauszubekommen, welchen Einsatz es von jedem Spieler nehmen sollte, um "im Mittel" einen Gewinn zu erzielen, aber umgekehrt nicht "zu unfair" zu den Spielern (also ihren Kunden) zu sein.

   Beschreiben Sie in einem kurzen Text, wie diese Analyse Ihrer Meinung nach durchgeführt werden sollte (ohne diese konkret mit Zahlen durchzurechnen).

4. Aufgabe: *(4 Punkte)*
Betrachten wir abschließend folgendes etwas blutige Szenario: Im Wilden Westen verabreden sich zwei Männer, Billy und Wally, aus nichtigen und mathematisch überdies völlig unerheblichen Gründen zu einem Duell. Billy ist ein mittelmäßiger Schütze, er würde einen Gegner mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% niederstrecken. Wally ist aber ein noch schlechterer Schütze, er erledigt seinen Gegner nur mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel.

Beim Duell werden beide Männer abwechselnd Schüsse aufeinander abgeben, bis einer von ihnen niedergestreckt wurde oder aber ihre beiden Magazine mit je sechs Patronen leer sind. Aus Fairnessgründen darf Wally anfangen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit überlebt Billy, mit welcher Wally, und mit welcher beide?
Begründen Sie kurz Ihre Rechnung.