4. Übungsblatt	Diskrete Strukturen	WS 2012/13

Abgabe bis Freitag, 16.11.2012, 8 Uhr beim DS-Kasten im 4. OG vor Sekretariat Näher. Die Aufgaben werden in derselben Woche in den Übungen besprochen.

1. Aufgabe: *(4 Punkte)*
Betrachten Sie die folgenden Binärrelationen über $M = \{a, b, c, d\}$:

$$\begin{aligned} R &= \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\} \cup \Delta_M \\ S &= \overline{R} \cup \Delta_M \\ T &= \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(d,d)\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie und geben Sie durch Auflistung der Elemente an:

1. $R \circ T$;
2. $R \cap S$;
3. T^-;
4. $R \cup T^-$

2. Aufgabe: *(12 Punkte)*
Betrachten Sie die in Aufgabe 1 angegebenen Binärrelationen R, S, T über $M = \{a, b, c, d\}$ sowie $U = \{(a,b),(c,d),(b,c),(d,a)\}$ und $V = \{(a,a),(b,b)\}$.

1. Welche dieser Relationen sind symmetrisch?
2. Welche dieser Relationen sind reflexiv?
3. Welche dieser Relationen sind transitiv?
4. Welche dieser Relationen sind antisymmetrisch?
5. Welche dieser Relationen sind vortotal?
6. Welche dieser Relationen sind nacheindeutig?

Eine kurze Begründung sollte jeweils ausreichen.

3. Aufgabe: *(4 Punkte)*
Formulieren Sie genauer und beweisen Sie dann: "Der Durchschnitt zweier symmetrischer Binärrelationen ist symmetrisch."

Achtung: Es gibt noch eine Zusatzaufgabe auf der nächsten Seite.
Damit können Sie Zusatzpunkte erzielen!
Abgabe dieser Zusatzaufgabe ist bis zum 23.11. möglich.

4. Aufgabe: *(1+1+3+4+1 Punkte)*
(Hier können Sie Zusatzpunkte erzielen!)
Die Vereinigungsbildung wird gerne auch über eine ganze Anzahl von Mengen betrachtet.
Hierzu kann man definieren:
Es sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 1$. Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen mit Elementen aus einem gemeinsamen Universum U. Dann bezeichne $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ die Menge von allen Elementen x aus U mit der Eigenschaft, dass es einen Index i ($1 \leq i \leq n$) gibt mit $x \in A_i$.
Formaler aufgeschrieben bedeutet dies:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{x \in U \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}.$$

Überlegen Sie:

1. Was bedeutet diese Definition für $n = 1$? Wie kann man also in dem Fall $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ einfacher notieren?
2. Was bedeutet diese Definition für $n = 2$? Wie kann man also in dem Fall $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ einfacher notieren (mit bereits eingeführten, bekannten Operationssymbolen)?

Algebraisch sauberer wäre es in gewissem Sinne, eine “n-stellige Vereinigung” zu definieren mit der Hilfe der bereits bekannten zweistelligen Vereinigung. Wir wollen so einen Operator behelfsweise mit V_n notieren und genauer das Folgende festlegen:

$$V_n(A_1, \ldots, A_n) = \begin{cases} A_1, & \text{falls } n = 1 \\ V_{n-1}(A_1, \ldots, A_{n-1}) \cup A_n, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Überlegen Sie:

3. Warum gilt $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = V_n(A_1, \ldots, A_n)$ für $n = 1$ bzw. $n = 2$ bzw. $n = 3$?
4. Nehmen wir jetzt einmal an, wir hätten für eine beliebige natürliche Zahl n die Aussage $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = V_n(A_1, \ldots, A_n)$ bereits bewiesen. Wie könnten wir denn unter dieser Annahme zeigen, dass dann auch $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = V_{n+1}(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ gelten muss?
5. Manchmal wird auch eine “nullstellige Vereinigung” eingeführt, indem man festlegt (in unserer Hilfsnotation): $V_0() := \emptyset$. Begründen Sie kurz, weshalb diese Festlegung sinnvoll ist.