6. Übungsblatt	**Diskrete Strukturen**	**WS 2012/13**

Abgabe bis Freitag, 30.11.2012, 8 Uhr beim DS-Kasten im 4. OG vor Sekretariat Näher.
Die Aufgaben werden in derselben Woche in den Übungen besprochen.

1. Aufgabe: *(6+2 Punkte)*
Es sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Binärrelation.
(1) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$R^n = \{(x_0, x_n) \in M \times M \mid \exists x_1, \dots, x_{n-1} \in M \forall j \in \mathbb{N}(j < n \implies (x_j, x_{j+1}) \in R)\}.$$

In Worten bezeichnet die rechte Seite die Menge aller geordneten Paare (x_0, x_n), für die es Brückenelemente $x_1, \dots, x_{n-1} \in M$ gibt, sodass gilt: $(x_0, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, ..., $(x_{n-1}, x_n) \in R$.

(2) Wie können Sie hieraus (und aus (welchen?) Aussagen der Vorlesung) schlussfolgern, dass folgender Sachverhalt gilt?
Es sei R eine transitive Binärrelation auf M. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Gibt es $n + 1$ Elemente $x_0, \dots, x_n \in M$ mit $((x_j, x_{j+1}) \in R)$ für alle $j < n$, so gilt auch $(x_0, x_n) \in R$.

2. Aufgabe: *(4 Punkte)*
Es bezeichne M die Menge aller bis zum heutigen Tage lebenden oder gelebt habenden Menschen, kurz, die Menschheit. Wir betrachten die folgenden Binärrelationen auf M:

- $(x, y) \in R_M$ genau dann, wenn x Mutter von y ist;
- $(x, y) \in R_V$ genau dann, wenn x Vater von y ist.

Was bedeuten, umgangssprachlich gesehen, die folgenden Relationen?
Was bedeutet es also landläufig, wenn $(x, y) \in R_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt?

1. $(x, y) \in R_1$ genau dann, wenn es Menschen u, v gibt mit (a) $(u, x) \in R_M$ und $(v, x) \in R_V$ oder auch (b) $(u, y) \in R_M$ und $(v, y) \in R_V$.
2. $R_2 = ((R_V^- \circ R_V) \cap (R_M^- \circ R_M)) \setminus \Delta_M$.
3. $R_3 = (R_V \cup R_M)^- \circ R_2$.
4. $R_4 = (R_V^- \cup R_M^-)^+$.

3. Aufgabe: *(8 Punkte)*
Betrachten Sie die dreielementige Grundmenge $M = \{a, b, c\}$. Geben Sie (wenn möglich) Binärrelationen $R_i \subseteq M \times M$ an mit folgenden Eigenschaften und begründen Sie kurz die Ihre Behauptung.

1. R_1 ist keine Quasiordnung.
2. R_2 ist sowohl eine Halbordnung als auch eine Äquivalenzrelation.
3. R_3 ist eine Äquivalenzrelation, aber keine Halbordnung.
4. R_4 ist eine Halbordnung, aber keine Äquivalenzrelation.
5. R_5 ist eine Halbordnung, aber keine totale Ordnung.
6. R_6 ist eine totale Ordnung.
7. R_7 ist eine Quasiordnung, aber weder Halbordnung noch Äquivalenzrelation.
8. R_8 ist Äquivalenzhülle von R_6.