

Diskrete Strukturen

WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

8. November 2012

Diskrete Strukturen Gesamtübersicht

- Organisatorisches und Einführung
- Mengenlehre
- Relationen und Funktionen
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Grundbegriffe (algebraischer) Strukturen
- Graphen



Wesentliche Definition der Vorlesung

Auf Georg Cantor geht folgende Definition über Mengen (Mannigfaltigkeiten) zurück:

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche *Elemente* der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Die Oper “Cantor — Die Vermessung des Unendlichen” von Ingomar Grünauer widmet sich dem Leben und Werk Georg Cantors; Uraufführung aus Anlass des 1200-jährigen Stadtjubiläums am 10. November 2006 im Opernhaus Halle, siehe Seite des Musikverlages.

Beispiele für Mengen und ihre üblichen Bezeichnungen

$\emptyset$: die *leere Menge* enthält gar keine Elemente

Schulkasse (als Menge von Schülerinnen und Schülern)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$: die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$: die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: die Menge der reellen Zahlen

Elementbeziehung und Angabe von Mengen

Um auszudrücken, dass x ein Element der Menge M ist, schreiben wir: $x \in M$.
Anstelle der Negation $\neg(x \in M)$ schreibt man kürzer: $x \notin M$.

Eine Menge heißt *endlich*, wenn man sie durch vollzähliges Aufschreiben ihrer Elemente beschreiben kann, z.B. eine Schulklasse durch Auflistung der Schüler(namen). $M = \{\text{Martin, Michael, Carla, } \dots\}$ ☺

Allgemein kann man (unter Zugrundelegung eines bekannten Universums) Mengen auch durch Eigenschaften (Aussageformen) beschreiben:

$x \in M \iff P(x)$ notiert man oft auch: $M = \{x \mid P(x)\}$ oder $M = \{x : P(x)\}$.

Das Universum kann bei dieser Schreibweise mit angegeben werden, z.B.:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = -1\}$.

Die leere Menge können wir (unabhängig vom Universum) beschreiben durch:

Aussage: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

Die Menge der natürlichen Zahlen (induktive Def. nach Zermelo)

Diese lassen sich wie folgt einführen:

- $\emptyset$ ist eine natürliche Zahl.
- Ist n eine natürliche Zahl, so ist ihr *Nachfolger* n' ebenfalls eine natürliche Zahl;
 n' enthält alle Elemente von n und zusätzlich die Menge n als Element.
Den hochgestellten Strich sprechen wir auch als *Nachfolgerstrich* an.
- Nichts anderes oder weiteres sind natürliche Zahlen.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen versammelt genau die soeben beschriebenen Elemente in sich.

In üblicherer Schreibweise: $\emptyset \sim 0$, $\emptyset' = \{\emptyset\} \sim 1$, $\{\emptyset\}' = \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \sim 2$.

Mengen und Datentypen — etwas Motivation

Datentypen sind durch Mengen(namen) und Operationen(namen) gegeben, Diese sind von grundlegender Bedeutung in fast allen Programmiersprachen. Mithilfe von einfachen Operationen lassen sich of komplexere beschreiben. Beispielsweise haben wir soeben die Menge $\mathbb{N}$ und die Nachfolgeroperation n' kennengelernt. Hierdurch lässt sich die Addition $+$ erklären. Hierzu seien n, m beliebige natürliche Zahlen.
 $n + 0$ ergibt n , $0 + n$ ergibt n ;
 $n' + m$ ergibt $(n + m)'$.
Wir addieren so zwei Zahlen, z.B. $3 + 5$, an der Tafel. Entsprechend kann man z.B. die Multiplikation einführen (zur Übung). Wir werden im Folgenden aber die aus der Schule bekannten Rechenregeln in Beispielen oft verwenden ohne expliziten Rückgriff auf die soeben gemachten Definitionen. Insbesondere schreiben wir $n + 1$ für den Nachfolger von n .

Vergleiche zwischen und Operationen auf Mengen

Im Folgenden werden wir zwei wichtige Vergleichs-Möglichkeiten für Mengen (konkret Gleichheit und Einschluss) sowie verschiedene Operationen kennenlernen, die gestatten, aus bekannten Mengen neue aufzubauen (diese werden auch unter dem Begriff der “Mengenalgebra” zusammengefasst).

Hinweis: Diese grundlegenden Begriffe sind meist auch in Programmiersprachen implementiert, die den Datentyp “Set” zulassen.

Syntax und Semantik, Bezeichnungen und Bezeichnetes, sind zentrale, in der Informatik immer wiederkehrende Konzepte.

Die *Syntax* der Mengenlehre legt fest, wie wir Mengen beschreiben und angeben können. Wir haben oben die Bildung solcher *Mengennamen* (informell) besprochen, kurz zusammengefasst durch Auflistung, Beschreibung mit Eigenschaften, oder auch Einführung von Abkürzungen.

Die *Semantik* solch einer Beschreibung ist die Menge selbst, die beschrieben werden soll.

Das Konzept der “Gleichheit” bezieht sich in der Mathematik meist auf die semantische Ebene.

Daher sprechen wir im Folgenden auch von “Mengengleichheit” zur Unterscheidung von der “Mengennamensgleichheit”.

Mengengleichheit

Def.: Zwei Mengen M_1 und M_2 sind *gleich*, i.Z.: $M_1 = M_2$, gdw.

$$x \in M_1 \iff x \in M_2.$$

Anstelle von $\neg(M_1 = M_2)$ schreiben wir auch $M_1 \neq M_2$.

Achtung: $\{1, 2, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$,

mehrfache Nennung oder Reihenfolge sind also unerheblich für die Mengengleichheit.

Unterschiedliche Bezeichnungen können dieselben Gegenstände bezeichnen.

Wie beweist man Mengengleichheit ?

Beweis von $M_1 = M_2$ in zwei Schritten (Richtungen):

(a) Wenn $x \in M_1$, so $x \in M_2$ sowie (b) Wenn $x \in M_2$, so $x \in M_1$.

Hinweis: Das benutzt die Tautologie $p \iff q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Teilmengen und Obermengen: Definition wichtiger Begriffe

N heißt *Teilmenge* von M ($N \subseteq M$) gdw. M heißt *Obermenge* von N ($M \supseteq N$) gdw. $\forall x(x \in N \Rightarrow x \in M)$; also: Für jedes x gilt: Wenn $x \in N$, so $x \in M$. Gilt überdies $N \neq M$, so sprechen wir von einer *echten Teilmenge* bzw. einer *echten Obermenge* und notieren $N \subset M$ bzw. $M \supset N$. Die Beziehung $N \subseteq M$ wird auch als *Inklusion* oder *Einschluss* (von N in M) angesprochen.

Beispiel: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Satz 1: Es seien N und M Mengen. Dann gilt: $N = M$ gdw. $(N \subseteq M) \wedge (M \subseteq N)$.

Beweis: (*elementweise Argumentation*) $N = M$ gdw.

$\forall x(x \in N \iff x \in M)$ gdw.

$\forall x((x \in N \implies x \in M) \wedge (x \in M \implies x \in N))$ gdw.

$\forall x(x \in N \implies x \in M) \wedge \forall x(x \in M \implies x \in N)$ gdw.

$(N \subseteq M) \wedge (M \subseteq N)$.

□

Ein ausführlicheres Beispiel

$n \in \mathbb{N}$ heißt *gerade*, falls $\exists k \in \mathbb{N}(n = k + k)$.

$n \in \mathbb{N}$ heißt *ungerade*, falls $\exists k \in \mathbb{N}(n + 1 = k + k)$.

Beispiel: 0 ist gerade, denn $0 = 0 + 0$; 1 ist ungerade, denn $1 + 1 = 2$.

Betrachte $G_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \}$ und $G_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \text{ ist gerade} \}$.

Behauptung: $G_1 \subseteq G_2$.

Beweis: Betrachte $n \in G_1$. Da n gerade, gilt: $n = k + k$ für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Einfache Algebra zeigt nun:

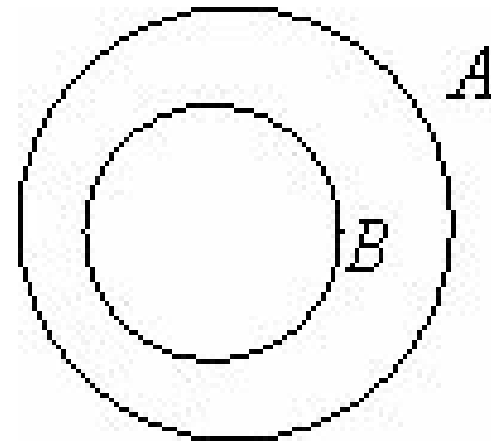
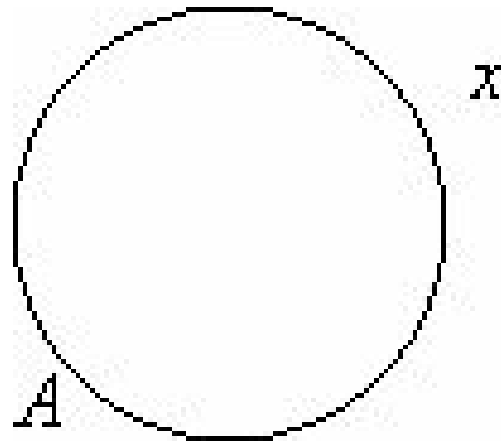
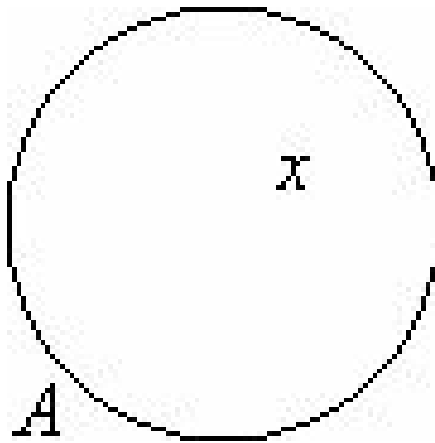
$$n^2 = (k + k)^2 = (2k)^2 = 4k^2 = (2k^2) + (2k^2)$$

Also ist n^2 ebenfalls gerade, d.h., $n \in G_2$. □

Frage: Gilt auch die Rückrichtung $G_1 \supseteq G_2$?

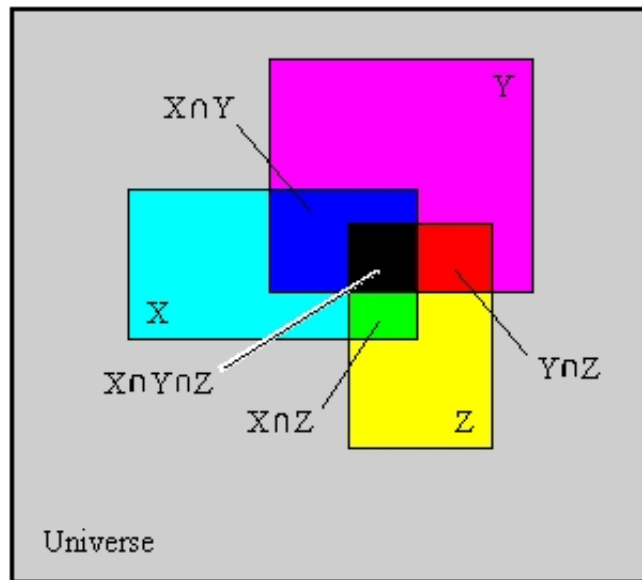


Venn-Diagramme



Problem: Uneinheitliche Beschriftung

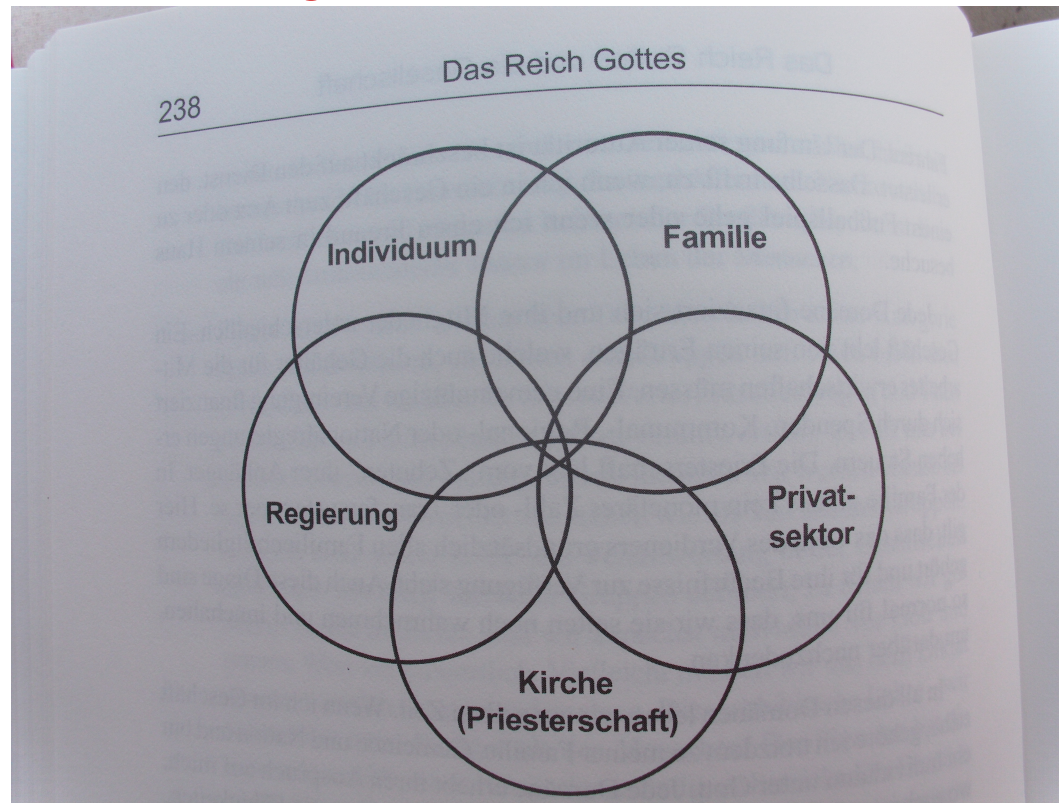
Venn-Diagramme: Schwierige Übersicht...



Schon bei drei Mengen X, Y, Z ist es schwierig, alle möglichen Lagen zueinander in einem Venn-Diagramm anzugeben.

~> **Formale Argumentationen** sind unumgänglich,
ebenso **klare Namensgebungen und Definitionen**.

Venn-Diagramme: Schwierige Übersicht...



Die erwünschte Darstellung aller Situationen gelingt nicht immer.

Eigenschaften der Inklusion

Satz 2: Es seien A , B und C Mengen. Dann gilt:

1. $A \subseteq A$;
2. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.
3. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial, und die letzte ist Teil von Satz 1.

ad 2.: Es gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$. Betrachte ein beliebiges $x \in A$.

Wegen $A \subseteq B$ gilt dann $x \in B$, und wegen $B \subseteq C$ folgt $x \in C$.

□

Eigenschaften der Gleichheit

Satz 3: Es seien A , B und C Mengen. Dann gilt:

1. $A = A$;
2. Aus $A = B$ und $B = C$ folgt $A = C$.
3. Aus $A = B$ folgt $B = A$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Satz 1 und Satz 2.1.

ad 2.: Es gelte $A = B$ und $B = C$,

also (i) $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ sowie (ii) $A \supseteq B$ und $B \supseteq C$ gemäß Satz 1.

Mit Satz 2.2 folgt aus (i) $A \subseteq C$ und aus (ii) $A \supseteq C$. Satz 1 liefert die Behauptung.

Die dritte Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Mengengleichheit. □

Potenzmengen

Def.: Zu jeder Menge M gibt es eine weitere Menge, die *Potenzmenge* von M , geschrieben 2^M (oder auch $\mathcal{P}(M)$), die genau die Teilmengen von M als Elemente enthält.

Lemma: Die Potenzmenge 2^M enthält in Sonderheit die Elemente $\emptyset$ und M .

Beweis: Es bleibt zu zeigen: $\emptyset \in 2^M$, also: $\emptyset \subseteq M$.

Die Implikation $(x \in \emptyset \implies x \in M)$ ist stets wahr, da die Prämisse falsch ist. □

Beispiel: $2^{\{1,2,3\}} = \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset \}$.

Hinweis: Potenzmengenkonstruktion ist wesentlich zum Verständnis des Nichtdeterminismus, eines der wichtigsten Begriffe der Theoretischen Informatik.



Hasse-Diagramme

(für endliche Potenzmengen)

Stellt Mengen als Punkte dar.

Mengen mit gleichviel Elementen erscheinen auf einer Ebene.

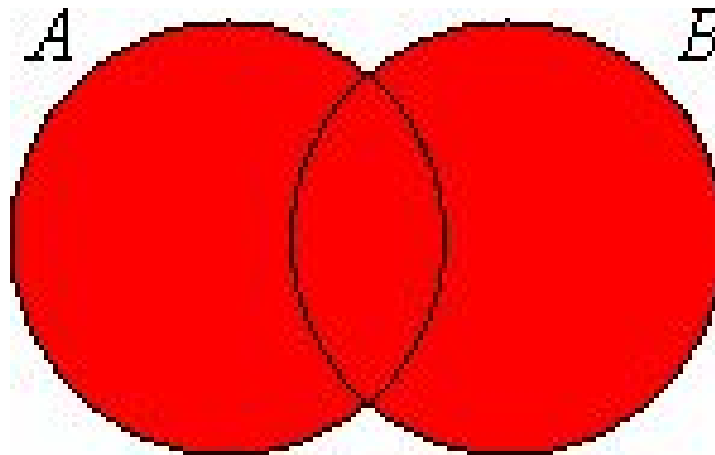
Oben erscheinen die größeren, unten die kleineren Mengen.

Durch einen (möglichst geraden) Strich werden solche Mengen A und B verbunden, für die $A \subset B$ gilt, sich aber kein C findet mit $A \subset C \subset B$.

Beispiel: siehe Tafel...

Mengenalgebra: Vereinigung

Def.: Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums).
Die Menge der Elemente, die zu A oder auch zu B gehören, wird als *Vereinigung* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \cup B$.

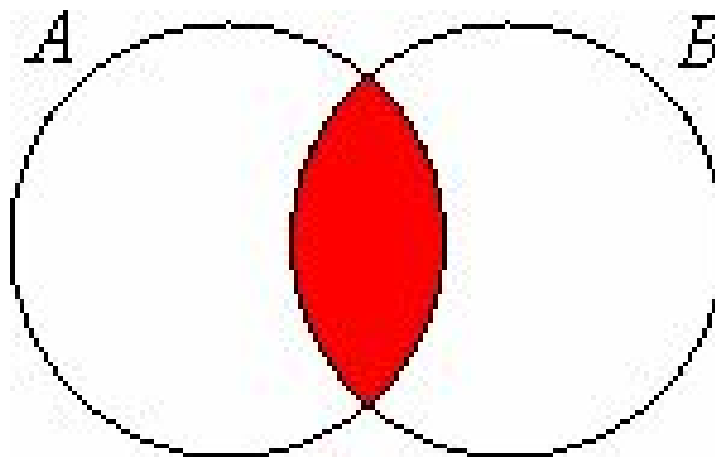


Venn-Diagramm:

Hinweis: $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$. $\vee$: (einschließendes) logisches Oder

Mengenalgebra: Durchschnitt

Def.: Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums).
Die Menge der Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören, wird als *Durchschnitt* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \cap B$.



Venn-Diagramm:

Hinweis: $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. $\wedge$: logisches Und

A und B heißen *disjunkt* oder *(element)fremd* gdw. $A \cap B = \emptyset$.

Zusammenhang Mengenoperationen und Inklusion 1

Satz 4: Es seien A und B Mengen. Dann gilt:

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
2. $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Beweis: Wir lösen die Satzformulierung in einzelne Behauptungen auf.

(a) **Behauptung:** $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$.

Es sei $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ nach Def. des Durchschnitts. □

(b) **Behauptung:** $A \subseteq A \cup B$.

Es sei $x \in A$. Dann gilt natürlich, dass $x \in A$ oder $x \in B$ wahr ist, also $x \in A \cup B$. □

(c) **Behauptung:** $B \subseteq A \cup B$.

$x \in B \implies x \in A \cup B$ sieht man entsprechend. □

Zusammenhang Mengenoperationen und Inklusion 2

Satz 5: Es seien A und B Mengen. Dann gilt als *Charakterisierung der Inklusion*:

$$(A \cup B = B) \iff A \subseteq B \iff (A \cap B = A).$$

Beweis: (durch *Ringschluss* Hinweis: $(p \iff q) \wedge (q \iff r) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies r) \wedge (r \implies p)$)

(a) **Behauptung:** Aus $A \cup B = B$ folgt $A \subseteq B$.

Nehmen wir also an, $A \cup B = B$ und betrachte irgendein $x \in A$.

Nach Def. der Vereinigung gilt: $x \in A \cup B$. Aus der Annahme folgt: $x \in B$.

Da x beliebig, folgt die behauptete Inklusion. □

(b) **Behauptung:** Aus $A \subseteq B$ folgt $A \cap B = A$. Wegen Satz 1 und Satz 4 bleibt zu zeigen:

Gilt (i) $A \subseteq B$ und (ii) ist $x \in A$ beliebig, so $x \in A \cap B$, also $x \in A$ und $x \in B$.

Der erste Teil gilt trivial wegen (ii), und nach Def. der Inklusion folgt der zweite aus (i). □

(c) **Behauptung:** Aus $A \cap B = A$ folgt $A \cup B = B$. Mit Satz 4 bleibt zu zeigen:

Gilt $A \cap B = A$ und ist $x \in A \cup B$ beliebig, so folgt $x \in B$.

Mit $x \in A \cup B$ gilt (i) $x \in A$ oder (ii) $x \in B$.

Da für Fall (ii) die Beh. trivial folgt, sei nun $x \in A$.

Wegen $A \cap B = A$ gilt dann aber auch $x \in B$ und somit die Beh. □

Zusammenhang Mengenoperationen und Inklusion 3

Satz 6: Es seien A , B und C Mengen. Dann gelten folgende *Monotoniegesetze*:

$$(A \subseteq B) \implies ((A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (A \cap C) \subseteq (B \cap C)).$$

Beweis: (a) Wir zeigen: $(A \subseteq B) \implies (A \cup C \subseteq B \cup C)$.

Betrachte dazu ein bel. $x \in A \cup C$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) Falls $x \in A$, so gilt nach Voraussetzung $x \in B$ und (mit Satz 4) $x \in B \cup C$.

(2) Falls $x \in C$, so folgt (mit Satz 4) $x \in B \cup C$.

(b) Wir zeigen: $(A \subseteq B) \implies (A \cap C \subseteq B \cap C)$.

Betrachte dazu ein bel. $x \in A \cap C$.

Nach Def. des Durchschnitts gilt sowohl $x \in A$ als auch $x \in C$.

Wegen $(A \subseteq B)$ gilt daher sowohl $x \in B$ als auch $x \in C$.

Nach Def. des Durchschnitts bedeutet dies: $x \in B \cap C$.

□

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung: Idempotenz

Eine zweistellige Operation $\circ$ heißt *idempotent*, falls für alle Elemente x der Grundmenge gilt: $x \circ x = x$.

Für ein festes Universum $\mathcal{U}$ sind Vereinigung und Durchschnitt zweistellige Operationen auf $2^{\mathcal{U}}$. Daher können wir formulieren:

Satz 7: Vereinigung und Durchschnitt sind idempotent.

Dieses *Idempotenzgesetz* lässt sich formaler wie folgt ausdrücken:

Für jede Menge A gilt: $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$.

Beweis: Satz 5 zeigt, dass sowohl $A \cup A = A$ als auch $A \cap A = A$ gleichwertig sind mit $A \subseteq A$.

Letzteres gilt mit Satz 2.1. □

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung: Kommutativität

Eine zweistellige Operation $\circ$ heißt *kommutativ*, falls für alle Elemente x, y der Grundmenge gilt: $x \circ y = y \circ x$.

Beispiel: Die Operation der Addition $+$ auf der Grundmenge $\mathbb{N}$.

Satz 8: Vereinigung und Durchschnitt sind kommutativ.

Dieses *Kommutativgesetz* lässt sich formaler wie folgt ausdrücken:

Für alle Mengen A, B gilt: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis von $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

Die anderen drei zu beweisenden Inklusionen (siehe Satz 1) zeigt man ähnlich.

Sei also $x \in (A \cup B)$ beliebig.

Nach der Def. der Vereinigung ergeben sich zwei mögliche Fälle:

Fall 1.: $x \in A$. Dann gilt $x \in B \cup A$ wegen Satz 4.

Fall 2.: $x \in B$. Dann gilt $x \in B \cup A$ ebenso wegen Satz 4.

□

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung: Assoziativität

Eine zweistellige Operation $\circ$ heißt *assoziativ*, falls für alle Elemente x, y, z der Grundmenge gilt: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Satz 9: Vereinigung und Durchschnitt sind assoziativ.

Dieses *Assoziativgesetz* lässt sich formaler wie folgt ausdrücken:

Für alle Mengen A, B, C gilt: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis von $(A \cup B) \cup C \supseteq A \cup (B \cup C)$.

Die anderen drei zu beweisenden Inklusionen (siehe Satz 1) zeigt man ähnlich.

Sei also $x \in A \cup (B \cup C)$ beliebig.

Nach der Def. der Vereinigung ergeben sich zwei mögliche Fälle:

Fall 1.: $x \in A$. Dann gilt $x \in A \cup B$ wegen Satz 4, und somit aus demselben Grund $x \in (A \cup B) \cup C$.

Fall 2.: $x \in B \cup C$ zerfällt in zwei Unterfälle: $x \in B$ und $x \in C$.

Für beide zeigt man mit derselben Argumentation $x \in (A \cup B) \cup C$.

Genauer folgt aus $x \in B$, dass $x \in A \cup B$ wegen Satz 4, und aus demselben Grund $x \in (A \cup B) \cup C$.

Falls $x \in C$, folgt sogar unmittelbar aus Satz 4, dass $x \in (A \cup B) \cup C$. □

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung: Distributivität

Beispiel: Aus der Schule sind Distributivgesetze wie $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für Zahlen a, b, c bekannt. Allerdings gilt $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$ meist nicht ...

Satz 10: Vereinigung und Durchschnitt sind “übereinander distributiv”.

Diese *Distributivgesetze* lassen sich formaler wie folgt ausdrücken:

Für alle Mengen A, B, C gilt:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis von $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Die anderen drei zu beweisenden Inklusionen (siehe Satz 1) zeigt man ähnlich.

Sei also $x \in (A \cup B) \cap C$ beliebig.

Nach der Def. des Durchschnitts gilt sowohl $x \in A \cup B$ als auch $x \in C$.

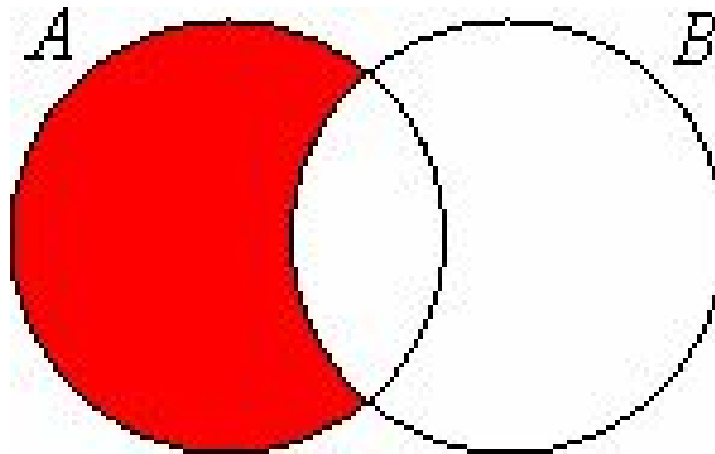
Nach der Def. der Vereinigung ergeben sich zwei mögliche Fälle:

Fall 1.: $x \in A$ und $x \in C$. Dann gilt $x \in A \cap C$ und $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ wegen Satz 4.

Fall 2.: $x \in B$ und $x \in C$. Dann gilt $x \in B \cap C$ und $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ wegen Satz 4. □

Mengenalgebra: Differenz

Def.: Es seien A, B Mengen (mit Elementen desselben Universums).
Die Menge der Elemente, die zwar zu A aber nicht zu B gehören, wird als *Differenz* von A und B bezeichnet; Schreibweise: $A \setminus B$ oder auch $A - B$.



Venn-Diagramm:

Es gilt: $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$

Mengenkomplement

Def.: Es sei M eine Menge über dem Universum $\mathcal{U}$ (das auch als Menge angesehen wird). Das **Komplement** von M , i.Z. $\overline{M}$, ist die Menge $\overline{M} = \{x \mid x \notin M\}$.

Beispiel: $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$.

Sei $M = \{x \mid P(x)\}$.

Mit $P(x)$ ist auch $\neg P(x)$ Aussageform. $\neg$ bezeichnet die Negation.

Damit gilt: $\overline{M} = \{x \mid \neg P(x)\}$.

Def.: M und $\overline{M}$ heißen auch **komplementär** zueinander.

Diese (symmetrische) Begrifflichkeit ist motiviert durch:

Lemma: $\overline{\overline{M}} = M$ (**Doppeltes Komplement**)

Beweis: $\overline{\overline{M}} = \{x \mid x \notin \overline{M}\} = \{x \mid \neg(\neg x \in M)\} = \{x \mid x \in M\} = M$.

Hinweis: (für Logiker) $\neg(\neg p) \equiv p$

Ein ausführlicheres Beispiel (Forts.)

Betrachte das Universum $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

Es sei $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \}$ und $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade} \}$.

Behauptung: $\overline{G} = U$.

Beweis: Es sei $n \in \overline{G}$, d.h., n ist nicht gerade. Es folgt ein **Widerspruchsbeweis**.

Wäre n nicht ungerade, so würde für alle Summendarstellungen $n + 1 = k + \ell$ gelten: $k \neq \ell$.

Wähle so eine Summendarstellung mit $k > \ell$ und ℓ größtmöglich. **Warum gibt es diese?**

Wäre $k > \ell + 1$, so könnte man k um Eins verringern und ℓ um Eins erhöhen, ohne die Summe zu verändern, im Widerspruch zur Wahl der Summendarstellung.

Also gilt $k = \ell + 1$, d.h. $n + 1 = \ell + 1 + \ell = (\ell + \ell) + 1$.

Daher ist $n = \ell + \ell$ gerade, im Widerspruch zur Ausgangssituation.

Also haben wir die Annahme, n wäre nicht ungerade, zum Widerspruch geführt.

Mithin ist n ungerade.

Entsprechend sieht man ein: Eine ungerade Zahl ist nicht gerade.

□

Einfache Zusammenhänge zwischen Differenz und Komplement

Es seien A und B Mengen aus dem Universum $\mathcal{U}$.

Lemma: $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$.

Beweis: Es sei $x \in \overline{A}$. Dann liegt x nicht in A , wohl aber im Universum $\mathcal{U}$. Nach Def. der Differenz ist also $x \in \mathcal{U} \setminus A$. Die Rückrichtung sieht man genauso. $\square$

Lemma: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Beweis: Eine schöne Übungsaufgabe.

Die Sätze von de Morgan

Satz 11: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Beweis: Wieder zeigen wir nur eine von vier Inklusionen.

Es sei $x \in \overline{A \cup B}$ beliebig.

x liegt also weder in A noch in B .

Das heißt: $x \notin A$ und $x \notin B$.

Nach Def. des Komplements und des Durchschnitts gilt daher: $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Man veranschauliche sich den Sachverhalt mit Venn-Diagrammen!

Mengenalgebra: Wichtige Aussagen (Zusammenfassung)

Satz: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$; $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Satz: $A \cup A = A \cap A = A$.

Satz: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

Satz: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Satz: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

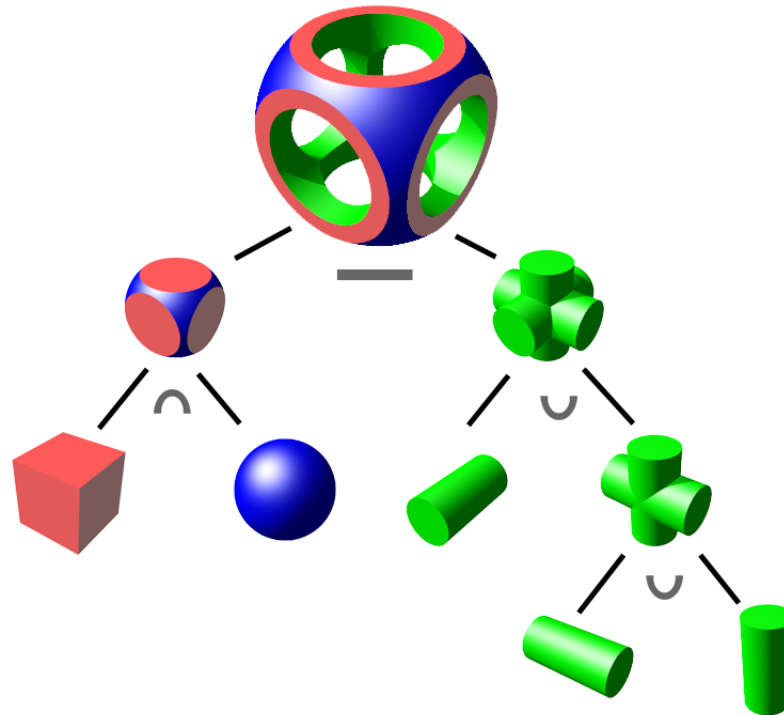
Satz: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

Satz: $(A \cup B = B) \iff A \subseteq B \iff (A \cap B = A)$.

Satz: $(A \subseteq B) \implies ((A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (A \cap C \subseteq B \cap C))$.

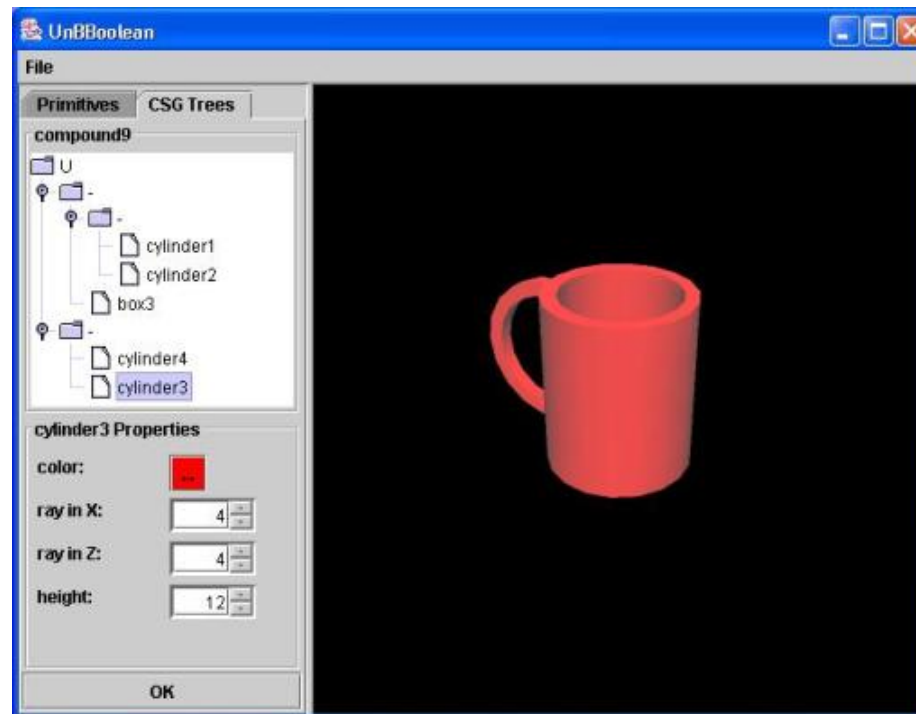
CSG: Constructive Solid Geometry:

Eine Beschreibungssprache für komplexe Oberflächen, im Wesentlichen beruhend auf einfachen Punktmengenoperationen



CSG: Constructive Solid Geometry:

Es gab jedenfalls auch einmal ein sourceforge-Projekt “unbboolean” für JAVA



Abschließende Bemerkungen

Warnung vor naivem Zugang: “Menge aller Mengen” (Antinomie von B. Russell)

Mögliche **Auswege**:

- (1) Festlegung eines *Universums* von Objekten, sodass nur diese als Elemente dienen können.
- (2) (Stufenweise) Konstruktion von Mengen, ausgehend von $\emptyset$.