

Diskrete Strukturen

WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

17. Dezember 2012

Diskrete Strukturen Gesamtübersicht

- Organisatorisches und Einführung
- Mengenlehre
- Relationen und Funktionen
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Grundbegriffe (algebraischer) Strukturen
- Graphen

Produktmenge

Def.: Die *Produktmenge* der Mengen M und N ist eine Menge, deren Elemente die *geordneten Paare* (x, y) sind mit $x \in M$ und $y \in N$.

Formaler: $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$

Beispiel: Punkte in der Ebene lassen sich durch geordnete Paare von Zahlen beschreiben, den sogenannten Koordinaten.

Hinweis: geordnetes Paar \neq Zweiermenge: die Reihenfolge ist bei Zweiermengen unerheblich.

Für geordnete Paare soll gelten: $(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d)$.

Für Zweiermengen gilt: $\{a, b\} = \{c, d\} \iff ((a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c))$.

Frage: Brauchen wir grundsätzlich neue Begriffe, oder können wir diesen Begriff aus bereits bekannten “ableiten” ?

Satz: Die Mengen $M_1 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ und $M_2 = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ sind gleich gdw. $a = c$ und $b = d$.

Beweis: \Rightarrow : Nach Def. der Mengengleichheit folgt (*) $\{a\} = \{c\}$ und $\{a, b\} = \{c, d\}$, oder aber (**) $\{a\} = \{c, d\}$ und $\{c\} = \{a, b\}$, selbst wenn $\{a\} = \{a, b\}$ gälte.

Gilt (*), so folgt zunächst $a = c$ und dann damit $b = d$.

Gilt (**), so ist $a = c = d$ sowie $c = a = b$ und somit $a = b = c = d$.

\Leftarrow : Mit $a = c$ und $b = d$ gilt: $\{a\} = \{c\}$ und $\{b\} = \{d\}$ und mithin $\{a, b\} = \{c, d\}$. □

Wir könn(t)en also $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$ definieren.

Produktmenge: Weitere Festlegungen

geordnetes n-Tupel (induktiv für $n > 2$): $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) := ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Beispiel: Geometrie: Punkte der Ebene \sim geordnete Paare;
Punkte des dreidimensionalen Raumes \sim geordnete Tripel, also 3-Tupel

Noch allgemeiner:

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \dots \wedge x_n \in M_n\}$$

oder induktiv:

$$M_1 \times \dots \times M_n = (M_1 \times \dots \times M_{n-1}) \times M_n$$

Achtung: implizite Klammerung!

Die \times notierte Operation heißt auch *Mengenprodukt*.

Mengenalgebra mit dem Mengenprodukt

Satz: $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset$.

Satz: Für beliebige Mengen M, N, P gilt: $M \times (N \cup P) = (M \times N) \cup (M \times P)$.

Satz: Für beliebige Mengen M, N, P gilt: $M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P)$.

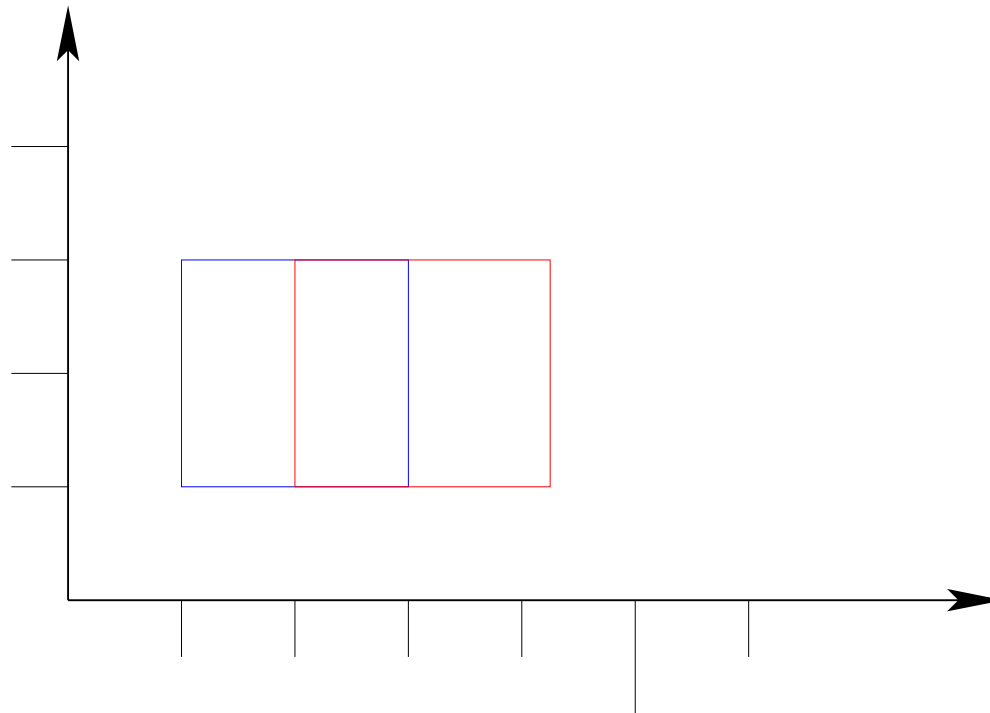
- Distributivgesetze gelten wieder wegen elementweiser Distributivität
- Es gelten auch “symmetrische Gesetze” wie $(M \cap N) \times P = (M \times P) \cap (N \times P)$

Ein geometrisches Beispiel

Betrachte die abgeschlossenen Intervalle $M = [1, 3]$, $N = [2, 4]$, $P = [1, 3]$.

$M \times P$ und $N \times P$ sind beides Quadrate mit der Seitenlänge zwei.

Die Distributivgesetze sind hier "offensichtlich".



Relationen

Def.: Es seien M_1, \dots, M_n Mengen.

R heißt *n-stellige Relation zwischen* M_1, \dots, M_n gdw.

$$R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n.$$

M_i heißen auch *Grundmengen* von R.

Gilt $M = M_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, so heißt R eine *n-stellige Relation über* M.

Spezialfall $n = 2$: *binäre Relation*

noch spezieller: $n = 2$ und $M_1 = M_2$: *Binärrelation*

Schreibweise: $R(x_1, \dots, x_n)$ statt $(x_1, \dots, x_n) \in R$ (*Prädikatnotation*)

Schreibweise: $x_1 R x_2$ statt $R(x_1, x_2)$ (*Infixnotation*)

Wir benutzen (fast) durchgängig die Element- bzw. Mengennotation.

Hinweis: Relationen und Prädikate: " $(x_1, \dots, x_n) \in R$ " ist Aussageform mit Variablen x_1, \dots, x_n .

Umgekehrt definieren Aussageformen Relationen.

Relationen: Beispiele

$M_1 = M_2 = M_3 = \mathbb{R}$: *Zwischenrelation* R:

$$R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R} \mid (a \leq b) \wedge (b \leq c)\}.$$

$M_1 = M_2 = \{g \mid g \text{ ist Gerade in der Ebene}\}$. *Parallelitätsrelation* \parallel :

$$g \parallel h \iff g \text{ und } h \text{ liegen parallel.}$$

$M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$: *Teilbarkeitsrelation* \mid

$$a \mid b \iff \exists k : b = a \cdot k.$$

$M_1 = M_2 = \mathbb{R}$: *Kleinerrelation* $<$.

$M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$; *Paritätsrelation* P: $(x, y) \in P \iff 2 \mid (x + y)$.

$M_1 = M_2 = \mathbb{R}$: $[0, 1] \times [0, 1]$ ist das (ausgefüllte) Einheitsquadrat

Spezielle Binärrelationen über Menge M :

Nullrelation: $R = \emptyset$.

Allrelation: $R = M \times M$ (evtl. auch für andere Stelligkeiten)

Gleichheitsrelation, auch *Diagonale* oder *Identitätsrelation*:

$$\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\}.$$

Hinweis: Nullrelation und Allrelation auch für Relationen zwischen Mengen gebräuchlich.

Operationen auf Relationen: Mengenoperationen

Sind R und S Relationen zwischen denselben Grundmengen, so sind

$R \subseteq S$, d.h., R ist *Teilrelation* von S ,

\bar{R} *Komplementrelation*,

$R \cup S$ und

$R \cap S$ wohldefiniert.

Beispiel: $\overline{\Delta_M}$ ist die *Ungleichheitsrelation*.

Beispiel: Betrachte $< \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\Delta_{\mathbb{R}}$; definiere $\leq := < \cup \Delta_{\mathbb{R}}$.

Beispiel: Betrachte $| \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $| \cap \overline{\Delta_{\mathbb{Z}}}$ beschreibt ... ???

Beispiel: Was haben Primzahlen zu tun mit: $| \cap (\overline{\Delta_{\mathbb{Z}}} \cup \overline{\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}})$?

Eigentliche Operationen auf Relationen: Inversenbildung

Es sei $R \subseteq M_1 \times M_2$. Die *Inverse von* oder *Transposition zu* R ist gegeben durch:

$$R^- = R^{-1} = R^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Satz 1: Es seien M_1 und M_2 Mengen sowie $R, S \subseteq M_1 \times M_2$. Dann gilt:

1. $(R^-)^- = R$.
2. $(R \cup S)^- = R^- \cup S^-$.
3. $(R \cap S)^- = R^- \cap S^-$.

Beweis: ad 1.: $(x, y) \in (R^-)^-$ gdw. $(y, x) \in R^-$ gdw. $(x, y) \in R$.

ad 2.: Es sei $(y, x) \in (R \cup S)^-$. Damit gilt $(x, y) \in R \cup S$.

1. Fall: Gilt $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R^-$. 2. Fall: Gilt $(x, y) \in S$, so $(y, x) \in S^-$.

In jedem Fall ist also $(y, x) \in R^- \cup S^-$. Die umgekehrte Richtung sieht man ähnlich.

ad 3.: Analog zu 2. □

Beispiel: $P^- = P$ für die Paritätsrelation P , aber was bedeutet $|^-$?

Eigentliche Operationen auf Relationen: Relationenprodukt

Def.: Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen.

Es sei $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.

Das *Relationenprodukt* (die *Komposition*) $R \circ S$ ist wie folgt definiert:

$$\forall x \in M_1 \forall z \in M_3 (x, z) \in (R \circ S) \iff \exists y \in M_2 ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S).$$

Beispiel: Wir können so die Teilbarkeitsrelation und die Paritätsrelation verknüpfen:

Nach Def.: $(x, z) \in (| \circ P) \iff \exists y (x | y \wedge (2 | (y + z)))$.

Also: $| \circ P = \{(x, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (2 | x \implies 2 | z)\}$.

Tafel!

Weitere hübsche Fragen:

Kennzeichnen Sie $| \circ |$, $|^- \circ |$ und $P \circ P$ möglichst kompakt!

Anwendung von Relationen: relationale Datenbanken

Professor F. aus T. hat zwei Listen, eine mit Matrikelnummern und zugehörigen Namen und Anschriften und eine andere mit den Noten der Prüfung zu DS aus dem vergangenen WS.

Er möchte für das nächste WS Korrektoren für DS rekrutieren und daher eine Sammlung von Namen und Anschriften (sowie DS-Noten) all derjenigen Studenten erhalten, die beim letzten Mal eine Eins vor dem Komma erzielten.

Wie könnten wir dieses Szenario mit den bislang eingeführten Operationen modellieren?

A: Menge von (möglichen) Anschriften (mit Namen)

M: Menge von (möglichen) Matrikelnummern

N: Menge von Noten, also: $N = \{1.0, 1.3, 1.7, 2.0, 2.3, 2.7, 3.0, 3.3, 3.7, 4.0, 5.0\}$.

erste Liste: $L_1 \subseteq M \times A$

zweite Liste: $L_2 \subseteq M \times N$

“interessante Kandidaten”: $K = L_2 \cap (M \times \{1.0, 1.3, 1.7\})$

Wunschliste: $K^- \circ L_1$

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt—Eigenschaften 1

Satz 2: (Assoziativitätsgesetz)

Es seien M_1, M_2, M_3, M_4 Mengen.

Es seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ sowie $T \subseteq M_3 \times M_4$.

Dann gilt: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Beweis: Es sei $(w, z) \in (R \circ S) \circ T$ bel.

Nach Def. gibt es ein $y \in M_3$ mit $(w, y) \in (R \circ S)$ und $(y, z) \in T$.

Nach Def. gibt es ferner ein $x \in M_2$ mit $(w, x) \in R$ und $(x, y) \in S$.

Somit gilt aber $(x, z) \in S \circ T$ und mithin $(w, z) \in R \circ (S \circ T)$.

Die umgekehrte Richtung sieht man entsprechend. □

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt—Eigenschaften 2

Satz 3: (Monotonie)

Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen.

Es seien $P, Q \subseteq M_1 \times M_2$ und $R, S \subseteq M_2 \times M_3$.

Dann gilt: $(P \subseteq Q \wedge R \subseteq S) \implies (P \circ R) \subseteq (Q \circ S)$.

Satz 4: (Identität)

Ist R eine Relation über der Menge M , so ist: $R = R \circ \Delta_M = \Delta_M \circ R$.

Die Beweise dieser beiden Sätze sind eine leichte Übungsaufgabe.

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt—Eigenschaften 3

Satz 5: Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen sowie $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$.
Dann gilt: $(R \circ S)^{-} = S^{-} \circ R^{-}$.

Beachte die umgedrehte Reihenfolge der Relationen!

Beweis: Es sei $(x, z) \in (R \circ S)^{-}$, also $(z, x) \in R \circ S$.

Also gibt es ein $y \in M_2$ mit $(z, y) \in R$ und $(y, x) \in S$.

Nach Def. der Inversen heißt das: $(y, z) \in R^{-}$ und $(x, y) \in S^{-}$.

Daher gilt: $(x, z) \in S^{-} \circ R^{-}$ wie behauptet.

Die Umkehrung sieht man ähnlich. □

Operationen auf Relationen: Relationenprodukt—Eigenschaften 4

Satz 6: ((Sub-)Distributivgesetze)

Auf die genaue Angabe der Bereiche der Relationen wird verzichtet, da die Ergebnisse mnemotechnisch möglichst günstig notiert wurden.

$$1. (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

$$2. T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$$

$$3. (R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

$$4. T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S).$$

Beweis: Wir zeigen nur 4. Es sei $(x, z) \in T \circ (R \cap S)$. Also gibt es ein y mit: (a) $(x, y) \in T$ und (b) $(y, z) \in R \cap S$. Da mit (b) (1) $(y, z) \in R$ und (2) $(y, z) \in S$, folgt aus (a) und (1) $(x, z) \in (T \circ R)$ und aus (a) und (2) $(x, z) \in (T \circ S)$, woraus zusammen die Beh. folgt. \square

Frage: Warum nicht Gleichheit in den letzten beiden Beziehungen?

Eigenschaften von Binärrelationen: Eine Sammlung wichtiger Definitionen

Es sei R eine Binärrelation über M . R heiÙe *reflexiv* gdw. $\forall x \in M((x, x) \in R)$.

R heiÙe *symmetrisch* gdw. $\forall x, y \in M((x, y) \in R \implies (y, x) \in R)$.

R heiÙe *antisymmetrisch* gdw. $\forall x, y \in M((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \implies x = y$.

R heiÙe *transitiv* gdw. $\forall x, y, z \in M((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \implies (x, z) \in R$.

R heiÙe *nacheindeutig* (oder *rechtseindeutig*) gdw.

$$\forall x, y, z \in M(((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R) \implies y = z).$$

R heiÙe *vortotal* (oder *linkstotal*) gdw. $\forall x \in M \exists y \in M((x, y) \in R)$.

Beispiel: Die einzige Relation R , die alle soeben eingeführten Eigenschaften erfüllt, ist die Gleichheitsrelation. Gilt nämlich $(x, y) \in R$, so auch $(y, x) \in R$ (Symm.) und somit $x = y$ (Antisymm.).

Weitere Begriffe: R *irreflexiv* gdw. $\forall x \in M((x, x) \notin R)$ gdw. Komplement \bar{R} reflexiv.

R *asymmetrisch* gdw. $\forall x, y \in M((x, y) \in R \implies (y, x) \notin R)$.

Eigenschaften von Binärrelationen—Weitere Beispiele

$R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$? r, s, a, t, n, v

Teilerrelation $|$ auf \mathbb{Z} ? r, s, a, t, n, v (auch für 0!)

Geradeneigenschaft: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x\}$

Kreiseigenschaft: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Lemma: Die Allrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Hinweis: “Nicht symmetrisch” ist nicht gleichbedeutend mit “antisymmetrisch”.

Hinweis: Entsprechend definierbar: *voreindeutig*, *linkseindeutig*, *nachttotal*, *rechtstotal*; anstelle von “total” spricht man auch von “vollständig”.

Hinweise

Binärrelationen mit speziellen Eigenschaften werden im folgenden Kapitel der Vorlesung eine hervorragende Rolle spielen.

Diese Begriffe werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums immer wieder begegnen.

Zur wichtigen Transitivität folgendes

Lemma 7: Sind R und S transitive Binärrelationen über M , so gilt:

(1) $R \circ R \subseteq R$ sowie (2) $R \cap S$ ist transitiv.

Beweis: Zu (1): Betrachte $(x, z) \in R \circ R$. Für ein y gilt dann: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$.

Aufgrund der Transitivität von R folgt $(x, z) \in R$.

(2) Es gelte $(x, y) \in R \cap S$ und $(y, z) \in R \cap S$. Also gilt $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, d.h., $(x, z) \in R$, da R transitiv. Entsprechend: $(x, z) \in S$, womit $(x, z) \in R \cap S$ folgt. \square

Mit R und S ist $R \circ S$ nicht notwendig transitiv:

$R = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $S = \{(2, 3), (4, 5)\} \rightsquigarrow R \circ S = \{(1, 3), (3, 5)\}$, aber $(1, 5) \notin R \circ S$.

Eigenschaften von Binärrelationen—Einfache Aussagen

Satz 8: (Einfache Gesetze) Es sei R eine Binärrelation über M .

1. R ist reflexiv gdw. $\Delta_M \subseteq R$.
2. R ist symmetrisch gdw. R^- ist symmetrisch gdw. $R^- \subseteq R$ gdw. $R^- = R$.
3. R ist transitiv gdw. $R \circ R \subseteq R$.
4. R ist antisymmetrisch gdw. $R \cap R^- \subseteq \Delta_M$.

Beweis: 1. R reflexiv gdw. $\forall x \in M((x, x) \in R)$ gdw. $\Delta_M \subseteq R$.

2. R ist symmetrisch gdw. $\forall x, y \in M((x, y) \in R \implies (y, x) \in R)$ gdw.

$\forall x, y \in M((y, x) \in R^- \implies (x, y) \in R^-)$ (gdw. R^- ist symmetrisch) gdw.

$\forall x, y \in M((y, x) \in R^- \implies (y, x) \in R)$ gdw. $R^- \subseteq R$; Gleichheit gilt aus Symmetrie.

3. R ist transitiv gdw. $\forall x, y, z \in M(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \implies (x, z) \in R)$.

Wegen Lemma 7(1) fehlt nur noch: Betrachte R mit (a) $R \circ R \subseteq R$ und (b) $x, y, z \in M$ bel. mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, also $(x, z) \in R \circ R$. Wegen (a) folgt aus (b): $(x, z) \in R$.

4. R ist antisymmetrisch gdw. $\forall x, y \in M(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \implies x = y)$ gdw.

$\forall x, y \in M((x, y) \in R \cap R^- \implies (x, y) \in \Delta_M)$.

□

Abschluss von Binärrelationen

Def.: Es sei R eine Binärrelation über M und P sei eine Eigenschaft von Relationen, die für $M \times M$ erfüllt sei. Die Relation R_P^* über M heißt *Abschluss* oder *Hülle* von R bezüglich P , gdw.:

1. R_P^* besitzt die Eigenschaft P , kurz: $P(R_P^*)$.
2. $R \subseteq R_P^*$.
3. Für alle Relationen S , $R \subseteq S$ gilt: $P(S) \Rightarrow R_P^* \subseteq S$.

Hinweis: Die Bedingung $P(M \times M)$ bedeutet, dass die Hülle von R stets existiert.

Die Allrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (Lemma).

Bemerkungen

Alternativ findet man oft in der Literatur:

$$R_p^* = \bigcap_{S \subseteq M \times M: R \subseteq S \wedge P(S)} S.$$

Die Menge, über die hier der Durchschnitt gebildet wird, ist nicht leer, da sie ja immer die Allrelation (also $M \times M$) enthält.

Allerdings erfüllt $\bigcap_{S \subseteq M \times M: R \subseteq S \wedge P(S)} S$ die Eigenschaft P nur dann sicherlich, wenn jeder Schnitt von Relationen mit Eigenschaft P ebenfalls Eigenschaft P erfüllt.

Für die uns interessierenden Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ist das allerdings gültig.

Spezielle Abschlüsse von R über M : die reflexive Hülle

Erinnerung: Der Abschluss von R bzgl. Eigenschaft P ist die kleinste R umfassende Relation, die P erfüllt.

Als Beispiel für P betrachte “Reflexivität”.

Satz 9: Es sei R eine Binärrelation über M . Die reflexive Hülle von R ist $R \cup \Delta_M$.

Beweis: Es bezeichne R^ρ die reflexive Hülle von R .

Wir zeigen zunächst $R \cup \Delta_M \subseteq R^\rho$ und dann die andere Inklusion.

Nach Def. von Hülle gilt $R \subseteq R^\rho$. Da R^ρ reflexiv, gilt $\Delta_M \subseteq R^\rho$ wegen Satz 8.

Zusammengenommen gilt daher: $R \cup \Delta_M \subseteq R^\rho$.

Wegen $\Delta_M \subseteq R \cup \Delta_M$ ist die Relation $R \cup \Delta_M$ reflexiv.

Nach Punkt 3 der Definition einer Hülle gilt also: $R^\rho \subseteq R \cup \Delta_M$. □

Spezielle Abschlüsse von R über M : die symmetrische Hülle

Satz 10: Es sei R eine binäre Relation über M .
Die symmetrische Hülle von R ist $R \cup R^{-}$.

Der Beweis ist völlig analog zu dem von Satz 9.

Überlegen Sie:

Ist das Komplement einer symmetrischen Relation stets symmetrisch?

Geben Sie einige Beispiele für Zahlenpaare aus $| \cup |^{-}$.

Ein wichtiger Satz über transitive Hüllen

Die *Potenz einer Binärrelation* R über M kann man induktiv wie folgt festlegen:

$$R^n := \begin{cases} \Delta_M & , \quad n = 0 \\ R^{n-1} \circ R & , \quad n > 0 \end{cases}$$

Schreibweise: *transitive Hülle* R^+ , *reflexiv-transitive Hülle* $R^* = (R \cup \Delta_M)^+$.

Satz 11: Es sei R eine Binärrelation über M . Dann gilt:

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n \text{ sowie } R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Ein Beispiel für transitive Hüllen

Gegeben sei eine Relation “Direkter-Vorgesetzter” mit folgenden Beziehungen:

C ist direkter Vorgesetzter von D und E.

B ist direkter Vorgesetzter von C.

A ist direkter Vorgesetzter von B.

Die transitive Hülle dieser Relation enthält nun zusätzlich auch die “indirekten Vorgesetzten”:

A ist Vorgesetzter von B, C, D, E.

B ist Vorgesetzter von C, D, E.

C ist Vorgesetzter von D und E.

Exkurs: Induktive Definitionen

Erinnerung: Die natürlichen Zahlen konnte man (vereinfacht) wie folgt einführen:

- a. 0 ist eine natürliche Zahl;
- b. Ist n eine natürliche Zahl, dann auch der Nachfolger $n' = n + 1$ von n .
- c. Nichts anderes sind natürliche Zahlen.

b. heißt auch *Induktionsaxiom*.

Nach diesem Schema gestalten sich (einfache) induktive Definitionen.

So wurden z.B. Potenzen von Binärrelationen eingeführt.

Mit diesem Aufbau lassen sich auch Beweise führen.

Exkurs: Induktive Definitionen und induktive Beweise:

Es sei $p(n)$ eine Aussageform, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Die vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, die auf dem Induktionsaxiom fußt und schematisch wie folgt arbeitet.

1. *Induktionsanfang* (IA) (auch *Anker* genannt): Zeige $p(0)$.

2. *Induktionsschritt* (IS) Es wird gezeigt:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $p(n)$ folgt $p(n + 1)$.

$p(n)$ heißt hier auch *Induktionsannahme* oder *Induktionsvoraussetzung* (IV);

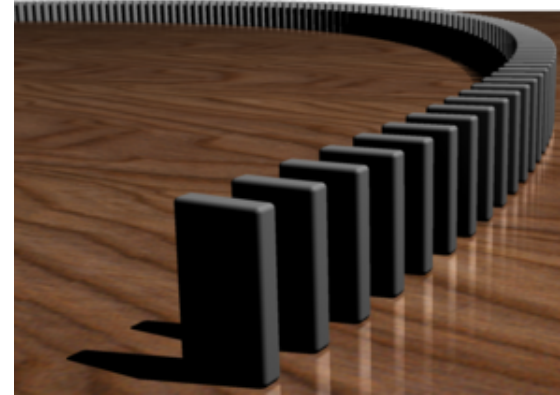
$p(n + 1)$ ist die *Induktionsbehauptung*.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt hieraus:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $p(n)$.

Manchmal auch Start mit $n = 1$ oder einer anderen "kleinen Zahl" m .

Man kann natürlich dann $n \geq m$ im IS verwenden.



Induktion veranschaulicht: Der Dominoeffekt:

Die Aufstellung gewährleistet:

Wenn der n -te Dominostein in der Reihe fällt, so auch der $n + 1$ -te.

Das gewährleistet den Induktionsschritt.

Jetzt fällt der erste Dominostein.

Folgerung: Schließlich werden alle Steine umgefallen sein.

Ein doppelter Induktionsbeweis

Lemma 12: Ist die Binärrelation $R \subseteq M \times M$ transitiv, so auch R^n für alle $n \in \mathbb{N}$.
Überdies gilt $R^n \subseteq R$ für alle $n \geq 1$.

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang für $n = 0$: Nach Def. der Relationenpotenz gilt: $R^0 = \Delta_M$. Wegen Satz 4 gilt: $\Delta_M \circ \Delta_M = \Delta_M$ und somit ist Δ_M mit Satz 8 transitiv.

Induktionsanfang für $n = 1$: Nach Def. der Relationenpotenz gilt: $R^1 = \Delta_M \circ R = R \checkmark$

Induktionsvoraussetzung (IV): Wir nehmen an, R^n ist transitiv und $R^n \subseteq R$.

Induktionsbehauptung (IB): R^{n+1} ist transitiv und $R^{n+1} \subseteq R$.

Induktionsschritt (IS): Wir zeigen: Aus IV folgt IB.

Betrachte also R^{n+1} . Nach Def. gilt: $R^{n+1} = R^n \circ R$, da $n + 1 > 0$.

Nach IV ist R^n transitiv und $R^n \subseteq R$, und nach Voraussetzung ist R transitiv.

Betrachte $(x, y), (y, z) \in R^{n+1}$ beliebig.

Es gibt also $x', y' \in M$, sodass $(x, x') \in R^n$, $(x', y) \in R$, $(y, y') \in R^n \subseteq R$ (IV!) und $(y', z) \in R$.

Da R transitiv, folgt erst $(y, z) \in R$ und somit $R^{n+1} \subseteq R$;

sodann auch $(x', z) \in R$ und daher $(x, z) \in R^n \circ R = R^{n+1}$.

Also ist R^{n+1} transitiv.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

Noch ein einfacher Induktionsbeweis

Lemma 13: Für jede Binärrelation $R \subseteq M \times M$ und beliebige natürliche Zahlen n, m gilt: $R^{n+m} = R^n \circ R^m = R^m \circ R^n$.

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Aus Symmetriegründen genügt zu zeigen: $R^{n+m} = R^m \circ R^n$. Fixiere bel. $m \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang für $n = 0$: $R^{0+m} = R^0 \circ R^m = R^m \circ R^0$, denn $R^0 = \Delta_M$, vgl. Satz 4.

IV: Wir nehmen an, $R^{n+m} = R^m \circ R^n$.

IB: $R^{n+m+1} = R^m \circ R^{n+1}$.

IS: Wir zeigen: Aus IV folgt IB.

Da $n + m + 1 > 0$, gilt: $R^{n+m+1} = R^{n+m} \circ R$.

Nach IV gilt weiter: $R^{n+m+1} = R^{n+m} \circ R = (R^m \circ R^n) \circ R$.

Wegen Satz 2 ist: $R^{n+m+1} = (R^m \circ R^n) \circ R = R^m \circ (R^n \circ R)$.

Da $n + 1 > 0$, folgt mit der Def. der Relationenpotenz: $R^{n+m+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = R^m \circ R^{n+1}$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

Noch ein Lemma

Lemma: Für beliebige Binärrelationen R sind $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ und $\bigcup_{n \geq 0} R^n$ transitiv.

Beweis: Betrachte $(\bigcup_{n \geq 1} R^n) \circ (\bigcup_{m \geq 1} R^m)$.

Dieser Ausdruck ist gleich dem folgenden (Übung): $\bigcup_{n, m \geq 1} R^n \circ R^m$.

Mit Lemma 13 ist dies gleich: $\bigcup_{n, m \geq 1} R^{n+m} = \bigcup_{n \geq 2} R^n$.

Klar, dass diese Menge enthalten ist in: $\bigcup_{n \geq 1} R^n$,

was mit Satz 8 die Transitivität von $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ zeigt.

Für $\bigcup_{n \geq 0} R^n$ argumentiert man genauso. □

Ein wichtiger Satz über transitive Hüllen

Satz: $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$; $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$.

Beweis: Zeige: $\bigcup R^n$ ist transitiv (voriges Lemma) und enthält $R \rightsquigarrow \subseteq \checkmark$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis für den Nachweis von \supseteq :

Angenommen, es gäbe ein $(x, y) \in \bigcup_{n \geq 1} R^n$ mit $(x, y) \notin R^+$. [+].

Dann gibt es ein n mit $(x, y) \in R^n$.

Wähle unter allen (x, y) mit [+] ein festes (x, y) mit minimalem $n \geq 1$, sodass $(x, y) \in R^n$.

Da $R = R^1 \subseteq R^+$, gilt $n \geq 2$.

$(x, y) \in R^n$ bedeutet: es gibt z mit $(x, z) \in R^{n-1}$, $(z, y) \in R$.

Da n minimal, gilt $(x, z) \in R^+$ und wegen $(z, y) \in R \subseteq R^+$ folgt $(x, y) \in R^+$, da R^+ transitiv.

Widerspruch !

Hinweis: Für Relationen R über endliche M haben wir also Algorithmus zur Berechnung von R^+ !

Für $m = 1, 2, \dots$ berechne $R^{\leq m} = \bigcup_{n=1}^m R^n$ solange, bis $R^m = R^{m-1}$.

Spezielle Abschlüsse von R über M : die transitive Hülle

Schreibweise: *transitive Hülle* R^+ , *reflexiv-transitive Hülle* $R^* = (R \cup \Delta_M)^+$.

Satz 14: Es sei R eine Binärrelation über M . Dann gilt: $R^* = R^+ \cup \Delta_M$.

Beweis: Es sei zunächst $(x, y) \in (R \cup \Delta_M)^+$.

Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl n mit $(x, y) \in (R \cup \Delta_M)^n$.

1. Fall: Gilt $n = 0$, so $x = y$, also $(x, y) \in \Delta_M$.

2. Fall: Gilt $n > 0$, so (da n minimal) $x \neq y$, also $(x, y) \in R^n \subseteq R^*$.

Zusammengenommen gilt: $(x, y) \in R^+ \cup \Delta_M$.

Ist andererseits $(x, y) \in R^+ \cup \Delta_M$, so unterscheide zwei Fälle:

1. Fall: Gilt $(x, y) \in R^+$, so sicher auch $(x, y) \in (R \cup \Delta_M)^+$, da $R \subseteq R \cup \Delta_M$.

2. Fall: Gilt $(x, y) \in \Delta_M$, so $(x, y) \in (R \cup \Delta_M)^0 \subseteq (R \cup \Delta_M)^+$. □

Matrix-Darstellung von zweistelligen Relationen

Sind M, N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen, genauer: $M = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $N = \{b_1, \dots, b_n\}$ so kann man $R \subseteq M \times N$ eine Matrix (Tabelle) M_R mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ (*binäre Matrix*) zuordnen:

Bezeichnet $M_R(i, j)$ den Eintrag der Matrix in Zeile i und Spalte j , mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, so gilt:

$M_R(i, j) = 1$ gdw. $(a_i, b_j) \in R$ und $M_R(i, j) = 0$ gdw. $(a_i, b_j) \notin R$.

M_R heißt auch *Relationenmatrix* zu R .

Beispiel: Für $M = N$ ist die Relationenmatrix zu Δ_M gerade die Einheitsmatrix.

↷ **Satz:** Eine Binärrelation R über M ist genau dann reflexiv, wenn M_R auf der Hauptdiagonalen nur Einsen enthält.

Eigenschaften von Relationenmatrizen

Die *Transponierte* einer Matrix M entsteht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen und wird mit M^T bezeichnet.

Satz: $M_R^T = M_{R^T}$.

Wie kann man also Symmetrie auf Relationenmatrixebene kennzeichnen?

Wie üblich gelte $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$, aber NICHT $1 \leq 0$.

Für zwei $m \times n$ -Matrizen M_1 und M_2 mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ schreiben wir $M_1 \leq M_2$, falls für alle Zeilen i und Spalten j (mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$) gilt: $M_1(i, j) \leq M_2(i, j)$.

Satz: Sind M, N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen und R, S Relationen zwischen M und N , so gilt: $R \subseteq S$ gdw. $M_R \leq M_S$.

Rechnen mit Relationenmatrizen 1: Addition

Es seien M_1, M_2 binäre Matrizen mit m Zeilen und n Spalten.

Definiere $M_1 + M_2$ “elementweise” wie folgt:

$$(M_1 + M_2)(i, j) = \min\{M_1(i, j) + M_2(i, j), 1\}.$$

Hinweis: Diese Addition entspricht dem logischen Oder.

Satz: Sind M, N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen und R, S Relationen zwischen M und N , so gilt: $M_{R \cup S} = M_R + M_S$.

Rechnen mit Relationenmatrizen 2: Multiplikation

Es seien M_1, M_2 binäre Matrizen.

M_1 habe m Zeilen und n Spalten und M_2 habe n Zeilen und p Spalten.

Definiere das Produkt $M_1 \cdot M_2$ "elementweise" wie folgt:

$$(M_1 \cdot M_2)(i, j) = \min\{\sum_{k=1}^n M_1(i, k) \cdot M_2(k, j), 1\}.$$

Beachte: Die Matrix $M_1 \cdot M_2$ hat m Zeilen und p Spalten.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z.B. erklärt sich die Null in der Ergebnismatrix durch:

$$0 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.$$

Satz: Sind M, N, P endliche Mengen mit m bzw. n bzw. p Elementen und R, S Relationen mit $R \subseteq M \times N$ und $S \subseteq N \times P$, so gilt: $M_{R \circ S} = M_R \cdot M_S$.

Rechnen mit Relationenmatrizen: Weitere Überlegungen

Machen Sie sich klar:

Welche Rechengesetze gelten für die Addition und die Multiplikation binärer Matrizen?

Welche gelten nicht? (Gegenbeispiele!)

Wann und wie könnte man *Potenzen* M^n einer binären Matrix M einführen?

Wäre dann auch $M^* = \sum_{n \geq 0} M^n$ sinnvoll und wohldefiniert?

Unter welchen Umständen könnte man die folgenden Sachverhalte als Wahrheiten aussprechen?

- $M_{\mathbb{R}}^n = M_{\mathbb{R}^n}$ bzw.
- $M_{\mathbb{R}}^* = M_{\mathbb{R}^*}$.

Anwendung: Wissensbasierte Systeme (Genealogie der englischen Königsfamilie)

Elternteil (george1, george2)

Elternteil (george3, george4)

Elternteil (george3, william4)

Elternteil (edward, victoria)

Elternteil (victoria, edward7)

Elternteil (edward7, george5)

Elternteil (george5, edward8)

Elternteil (george5, george6)

Elternteil (george6, elizabeth2)

Elternteil (victoria, alice)

Elternteil (alice, victoriaalb)

Elternteil (victoriaalb, alicemb)

Elternteil (alicemb, philip)

Dies definiert uns Relation E auf der endlichen Menge $X = \{g.1, g.2, g.3, g.4, w.4, \dots\}$.

Ein Ausschnitt der entsprechenden Relationenmatrix M_E (mit X wie angedeutet durchnummeriert):

0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Fragen: Was "bedeutet" E^2 ?

Wie sieht die dazugehörige Relationenmatrix M_{E^2} aus ?

Wie könnte man M_{E^2} aus M_E "direkt" berechnen ?