Diskrete Strukturen

WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

11. Januar 2013

Diskrete Strukturen Gesamtübersicht

- Organisatorisches und Einführung
- Mengenlehre
- Relationen und Funktionen
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Grundbegriffe (algebraischer) Strukturen
- Graphen

Mächtigkeit von Mengen — anschauliche Definitionen

Was bedeutet der Prozess des Zählens (Nummerierens) allgemein ?!
Für eine endliche Menge M könnte er in der (evtl. sukzessiven) Konstruktion einer Bijektion von $[n] := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ auf M bestehen.
Wir sagen dann auch: M *hat* n *Elemente*.

Allgemeinere Def.: Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig* gdw. es gibt eine Bijektion $f : A \to B$.
Speziell heißt eine Menge A *abzählbar unendlich*, wenn sie mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.
Satz: Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
Zermelos Definition der natürlichen Zahlen, derzufolge Zahlen spezielle Mengen sind, bekommt nun einen tieferen Sinn:
Satz: A hat n Elemente gdw. es gibt eine Bijektion zwischen A und der Menge n.

Mächtigkeit von Mengen — abstrakte Definition

Wir fixieren ein Universum U.

Wir betrachten die Binärrelation R auf 2^U mit $(A, B) \in R$ gdw. A und B sind gleichmächtig.

Satz: R ist eine Äquivalenzrelation auf 2^U.

<u>Beweis:</u> Nach Def. gilt: $(A, B) \in R$ gdw. es gibt eine Bijektion $f : A \to B$.

Die Identität zeigt: $(A, A) \in R$. Also ist R reflexiv.

Mit f ist auch f^{-1} bijektiv (Lemma); also ist R symmetrisch.

Gilt $(A, B) \in R$ und $(B, C) \in R$, so gibt es Bijektionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.

Die Komposition $f \circ g : A \to C$ ist auch bijektiv (Satz).

Daher gilt: $(A, C) \in R$, und R ist also transitiv. $\square$

Def.: Die Äquivalenzklasse $[A]_R$ heißt *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* von A, geschrieben $|A|$.

Bem.: $|\cdot|$ ist also die kanonische Abbildung von R.

Es bezeichne $\mathfrak{Card}(U) := 2^U/R$ die Mächtigkeiten von Teilmengen von U.

Zum Vergleich von Mächtigkeiten

Def.: Für Mengen A und B definieren wir:
$|A| \leq |B|$ gdw. es gibt eine injektive Abbildung $f : A \to B$.

Satz: $\mathcal{S}$ mit $(A, B) \in \mathcal{S}$ gdw. $|A| \leq |B|$ ist eine Quasiordnung auf $2^{\mathcal{U}}$.
Satz: $\leq$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathfrak{Card}(\mathcal{U})$.
Insbesondere ist hier der Satz von Schröder-Bernstein in folgender Fassung enthalten: $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ ist gleichbedeutend damit, dass eine Bijektion zwischen A und B existiert.
Beweise als Übung.
Maximale Ketten in $\mathcal{S}$ ergeben sich dadurch, dass wir aus jeder Kardinalität aus $\mathfrak{Card}(\mathcal{U})$ einen Vertreter auswählen.

Vertreter für Mächtigkeiten

Wie wir wissen, lassen sich Äquivalenzklassen eindeutig durch ihre Vertreter darstellen.

- Mögliche Vertreter für die Mächtigkeit von n sind n oder auch $[n]$.
  Wir können natürlich $|[n]|$ und n identifizieren.
  Endliche Mächtigkeiten sind somit gerade die natürlichen Zahlen.
- Mögliche Vertreter für die abzählbar unendliche Mächtigkeit sind, außer $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.
- Mächtigkeiten erweitern in natürlicher Weise den Begriff der natürlichen Zahl.
  Insbesondere lassen sich Mächtigkeiten linear anordnen:

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq |\mathbb{N}| \leq \cdots$$

Das Dirichletsche Schubfachprinzip

Schreibweise: Für Mengen A und B schreibe $|A| < |B|$, falls $|A| \leq |B|$ und nicht $|A| = |B|$.

Satz 1: Gilt $|A| < |B|$, so gibt es keine injektive Abbildung $f : B \to A$.

Beweis: Da $|A| \leq |B|$, gibt es eine injektive Abbildung $g : A \to B$. Gäbe es eine injektive Abbildung $f : B \to A$, so wäre $|A| = |B|$ nach dem Satz von Schröder-Bernstein, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Folgerung: Gilt $|A| < |B|$, so gibt es zu jeder Abbildung $f : B \to A$ wenigstens zwei Elemente b, b' mit $f(b) = f(b')$.

Anwendung: Verteilt man n Gegenstände auf m Fächer mit $m < n$, so gibt es ein Schubfach mit mindestens zwei Gegenständen.

Schubfachprinzip: Erste Beispiele

(a) Unter 13 Personen gibt es mindestens zwei, die in demselben Monat Geburtstag haben.

Die “Gegenstände” sind die Personen und die “Schubfächer” sind die Monate.

(b) In einer Waschmaschine befinden sich 14 weiße einzelne Socken und 18 schwarze einzelne Socken. Zieht man blind drei Socken heraus, so hat man ein Paar gleichfarbige Socken (Hurra!).

Die “Gegenstände” sind die Socken und die “Schubfächer” sind die Sockenfarben.

Lemma: Es sei M eine endliche Menge und $R \subseteq M \times M$ eine symmetrische Relation mit $R \cap \Delta_M = \emptyset$. Für $a \in M$ sei $N(a) = \{b \mid (a, b) \in R\}$ die Menge der Nachbarn von a. Dann gibt es zwei Elemente $x, y \in M$ mit $|N(x)| = |N(y)|$.

<u>Beweis:</u> Da $R \cap \Delta_M = \emptyset$, gilt für alle $a \in M$: $|N(a)| \in \{0, \ldots, |M| - 1\}$.

Fall 1: Gibt es ein a mit $|N(a)| = |M| - 1$, so gibt es kein b mit $N(b) = \emptyset$.

M ist dann die Menge der Gegenstände, und $\{1, \ldots, |M| - 1\}$ ist die Menge der Schubfächer.

Fall 2: Es gibt kein a mit $|N(a)| = |M| - 1$.

M ist dann die Menge der Gegenstände, und $\{0, \ldots, |M| - 2\}$ ist die Menge der Schubfächer. $\square$

Interpretation: M: Menge von n Menschen, R: Nachbarschaftsrelation

Es sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Binärrelation.
In einer Übung wurde gezeigt, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$R^n = \{(x_0, x_n) \in M \times M \mid \exists x_1, \ldots, x_{n-1} \in M \forall j \in \mathbb{N}(j < n \implies (x_j, x_{j+1}) \in R)\}.$$

Es sei nun $|M| = m$. Beh.: $R^+ = \bigcup_{n=1}^{m-1} R^n$.
Auf der Ebene der Relationenmatrizen liefert dies einen einfachen Algorithmus zur Berechnung der transitiven Hülle.
Warum stimmt also: $\forall (x, y) \in R^+ \exists 1 \leq n < m : (x, y) \in R^n$?
Beweis: Betrachte also $(x, y) \in R^k$ für ein $k \geq m$ (sonst ist die Aussage trivial).
Wir nehmen ferner an, k sei die kleinste Zahl mit $(x, y) \in R^k$ †.
Also gibt es $k - 1$ Brückenelemente $x_1, \ldots, x_{k-1} \in M$ mit: $\forall j \in \mathbb{N}(j < k \implies (x_j, x_{j+1}) \in R)$, wobei $x_0 = x$ und $x_k = y$.
Diese insgesamt $k + 1$ vielen Elemente sind als “Gegenstände” auf $m < k + 1$ Fächer (die Elemente von M) zu verteilen, das j-te Element kommt dabei in Fach x_j. Dann gibt es also zwei Indizes $i < j$ mit $x_i = x_j$. Wir können also $(x, y) \in R^{k-(j-i)}$ begründen wegen:

$$x = x_o, (x_0, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \ldots, (x_{i-1}, x_i) \in R, x_i = x_j, (x_j, x_{j+1}) \in R, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in R, x_k = y$$

Dies widerspricht der Minimalität von k, siehe †. $\square$

Ein nachgeholter Beweis über endliche Mengen

Satz 2: Ist A endlich und $f : A \to A$, so sind gleichwertig:
(1) f ist surjektiv, (2) f ist injektiv, (3) f ist bijektiv.

Beweis: Wir (nur) zeigen die Aussage:

$\forall n$: Ist A Menge mit n Elementen und $f : A \to A$ surjektiv, so ist A injektiv.

Für $n = 0, 1$ sind die Aussagen offenbar richtig.

IV: Die Aussage gilt für alle Mengen mit weniger als n Elementen.

Betrachte Menge A mit $n > 1$ Elementen und Surjektion $f : A \to A$.

Wäre f nicht injektiv, so gäbe es $a, b \in A$, $a \neq b$ mit $f(a) = f(b)$.

Da f surjektiv, gibt es c mit $f(c) = a$.

Gilt $c \neq a$, so wäre f' mit (1) $f'(x) = f(x)$ ausgenommen (2) $f'(a) = a$ sowie $f'(c) = f(b)$ und (3) $f'(y) = y$ für $y \neq c$ mit $f(y) = a$ ebenfalls eine Surjektion, die nicht injektiv ist.

(Falls $c = a$, so vertausche die Rollen von a und b.)

Es gibt also ein solches Beispiel mit $f'(z) = a$ gdw. $z = a$.

Nach IV ist die wohldefinierte Einschränkung von f' auf $A \setminus \{a\}$ eine Surjektion, die ebenfalls Injektion ist. Damit wäre dann aber auch f' auf A eine Injektion. $\square$

Abzählbare Mengen

Satz 3: Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter, endlicher, nichtleerer Mengen.
Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar unendlich.

<u>Beweis:</u> Gesucht: Bijektion ϕ von $\mathbb{N}$ auf $M^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.
Es bezeichne m_n die Zahl der Elemente von M_n und $m_n^+ = \sum_{0 \le j < n} m_j$.
Es gibt also Bijektionen $\phi_n : [m_n] \to M_n$.
Da $\forall n : m_n > 0$, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Zahl $n(k) \in \mathbb{N}$ mit $m_{n(k)}^+ \le k \le m_{n(k)+1}^+$.
Da die M_n paarweise disjunkt sind, ist $k \mapsto \phi_{n(k)}(k - m_{n(k)}^+)$ die gesuchte Bijektion ϕ. $\square$

Folgerung: Sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge. Die Menge aller endlichen Folgen, gebildet von Elementen aus M, ist abzählbar unendlich.

Überabzählbare Mengen sind Mengen, die nicht abzählbar sind.

Satz 4: $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Beweis: (Cantors *Diagonalisierungsargument*; ein spezieller Widerspruchsbeweis)
Andernfalls gäbe es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$.
Betrachte $S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.
Da $S \in 2^{\mathbb{N}}$, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $f(s) = S$.
Wäre $s \in S$, so $s \notin S$ nach Def. von S.
Wäre $s \notin S$, so folgt nach Def. von S: $s \in S$.
Also folgt aus der Annahme der Existenz von f die Kontradiktion:
$s \in S \iff s \notin S$.
Daher ist die Annahme falsch. $\square$

Dieses Argument liefert: Allgemeiner gilt: A und 2^{A} sind nicht gleichmächtig.

Überabzählbare Mengen: ein weiteres Beispiel

Es bezeichne $M^N := \{f \mid f : N \to M\}$.

Satz: $2^{\mathbb{N}}$ und $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sind gleichmächtig.

Beweis: Zu jeder Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ kann man seine *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definieren durch $\chi_M(x) = 1$ gdw. $x \in M$. Umgekehrt lässt sich jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ als charakteristische Funktion der Menge $M_f = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 1\}$ auffassen. $\square$

Hinweis: Für endliche Mengen entsprechen Indikatorfunktionen praktisch wichtige *Bitvektoren*.

Zur Illustration der Diagonalisierung

Angenommen, es gäbe eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$.
Dann gäbe es auch eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\chi_M \mid M \in 2^{\mathbb{N}}\}$.
Wir könnten dann folgende (unendliche) Tabelle erstellen:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
g(0) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
g(1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
g(2) & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
g(3) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\
\vdots & & & & & \ddots & & \dots
\end{array}
$$

Betrachte die Indikatorfunktion, welche durch “Umdrehen” der rot dargestellten Bits auf der Diagonalen entsteht. Diese ist “offensichtlich” von jeder der aufgelisteten Indikatorfunktionen verschieden, also gibt es keine vollständige Auflistung aller Indikatorfunktionen der natürlichen Zahlen.

Eine überraschende Folgerung für die Informatik

Programmtexte (in einer fixierten Programmiersprache) lassen sich (rein syntaktisch) als endliche Folgen über einer endlichen Menge (dem *Alphabet*) begreifen.

Folgerung: Die Menge aller Programmtexte ist abzählbar.

Programmtexte können zur Beschreibung von Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ verwendet werden.

Folgerung: Nicht jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ kann durch einen Programmtext beschrieben werden.

$\leadsto$ “Computer können nicht alles.”

Kombinatorik

- Summenregel
- Produktregel
- Inklusions-/ Exklusionsprinzip
- Funktionenanzahlen
- Etwas fortgeschrittene Kombinatorik

Summenregel I

Satz 5: Sind A und B disjunkte endliche Mengen, so gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

<u>Beweis:</u> Die Aussage ist trivial für $|B| = 0$, also $B = \emptyset$.

Die Aussage ist ebenso klar für $|B| = 1$, also $B = \{a\}$ für ein $a \notin A$. (*)

Im IS nehmen wir an, die Aussage würde für alle B mit $|B| \leq n$ gelten.

Betrachte ein B mit $|B| = n + 1$. Also ist $B \neq \emptyset$.

Wähle $b \in B$ willkürlich, aber fest. Auf $B' = B \setminus \{b\}$ lässt sich die IV anwenden.

$\leadsto |A \cup B'| = |A| + |B'|$.

Wegen (*) gilt $|A \cup B| = |(A \cup B' \cup \{b\}| = |A| + (|B'| + 1) = |A| + |B' \cup \{b\}| = |A| + |B|$. $\square$

Summenregel Interpretation

Manchmal ist es hilfreich für das Verständnis, Mengen möglicher Versuchsausgänge eines Experimentes zu betrachten.

Angenommen, wir könnten für einen Versuch die möglichen (endlich vielen) Ergebnisse in zwei Typen klassifizieren: Typ A bzw. B.
Das soll bedeuten, dass jeder Versuchsausgang vom Typ A oder vom Typ B ist, aber nicht von beiden Typen.

Gibt es n_A viele Ausgänge vom Typ A und n_B viele vom Typ B, dann gibt es $n = n_A + n_B$ viele Versuchsausgänge insgesamt.

Summenregel II (allgemein)

Satz 6: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_k$ seien endliche, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Beweis: Die Aussage stimmt für $k \leq 1$.

Angenommen, sie gilt für Vereinigungen von höchstens $k-1$ Mengen, $k \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \cup A_k\right| \\
&= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right| + |A_k| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| + |A_k|
\end{aligned}$$

$\square$

Produktregel

Satz 7: Sind A und B endliche Mengen, so gilt:

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Für Mengen $A_1, \ldots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$, definieren wir rekursiv:

$$\bigtimes_{i=1}^{k} A_i = \begin{cases} \{\emptyset\}, & k = 0 \\ A_1, & k = 1 \\ \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} A_i\right) \times A_k, & k > 1 \end{cases}$$

Satz 8: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_k$ seien endliche Mengen. Dann gilt:

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{k} A_i \right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| \, .$$

<u>Beweis:</u> völlig analog zur Summenregel durch *verschachtelte Induktion*:

also: 1. Induktion über k und

2. im Induktionsschritt Induktion über die Mächtigkeit der zweiten Menge; diese “innere Induktion” ist im Beweis des vorigen Satzes “versteckt”. $\square$

Entscheidungsbäume

Die Produktregel kann man sich mit einem *Entscheidungsbaum* veranschaulichen.

Beispiel: Wie viele Binärzahlen mit drei Ziffern gibt es ?
Da drei Entscheidungen zu fällen sind (für jede Ziffer eine), haben Pfade von der Wurzel bis zu den Blättern stets die Länge drei.
Da es sich um binäre Entscheidungen jeweils handelt, hat jeder Knoten, der kein Blatt ist, zwei Kinder.
Durch Abzählen der Blätter sehen wir die Lösung: acht.
Dies liefert auch die Produktregel: $|\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}| = 2^3 = 8$.

Ein ausführliches Beispiel

In einigen (älteren) Programmiersprachen beginnt jeder Variablenname mit einem der 26 Buchstaben des Alphabets.
Anschließend folgen bis zu sieben weitere Zeichen, wovon jeder entweder ein Buchstabe oder eine der Ziffern 0 bis 9 ist.
Wie viele verschiedene Variablennamen gibt es ?
Wir können die Menge A der Variablennamen in 8 disjunkte Teilmengen aufteilen: A_i bezeichne all Variablennamen der Länge i, $i = 1, \ldots, 8$.
Summenregel $\rightsquigarrow |A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| + |A_7| + |A_8|$.
Offensichtlich gilt: $|A_1| = 26$.
Die Menge der Buchstaben und Ziffern hat nach der Summenregel 36 Elemente.
Die Produktregel liefert: $|A_i| = 26 \cdot 36^{i-1}$.

Eine hilfreiche Formel: die *geometrische Reihe*

Satz: Für Zahlen a und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Beweis: per Induktion: IA $n = 0$ ✓. Zum IS; betrachte $n > 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i\right) + a^n = \frac{a^n - 1}{a - 1} + \frac{a^{n+1} - a^n}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Das liefert im vorigen Beispiel:

$$A = 26 \cdot \left(\sum_{i=0}^{7} 36^i\right) = 26 \cdot \frac{36^8 - 1}{35} \approx 10^{12}.$$

Ein leichtes Korollar: Potenzen

Wir können das $(n-1)$-fache (kartesische) Mengenprodukt von gleichen Mengen auch in Potenzschreibweise notieren, d.h.:

$$M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ mal } M}$$

M^n beinhaltet also alle n-Tupel von Elementen aus M.

Folgerung: $|M^n| = |M|^n$. Beweis: Produktgesetz

Inklusions-Exklusionsprinzip | Venn-Diagramme an der Tafel

Satz 9: Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Beweis: Führe einen Induktionsbeweis über die Größe von B.
IA: $|B| = 0 \rightsquigarrow B = \emptyset \rightsquigarrow A \cap B = \emptyset \rightsquigarrow |A| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + 0 - 0$.
IV: Wir nehmen an, die Aussage gelte für Mengen B der Größe höchstens n.
IS: Sei B eine Menge mit $n + 1 \geq 1$ Elementen. Der Fall $A \cap B = \emptyset$ ist durch die Summenregel abgedeckt. Wähle daher $b \in A \cap B$ beliebig, aber fest.
Auf $B' = B \setminus \{b\}$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden.
$\rightsquigarrow |A \cup B'| = |A| + |B'| - |A \cap B'|$.
Ferner ist (1) $A \cup B = A \cup B'$ und (2) $(A \cap B') \cap \{b\} = \emptyset$. Wegen (2) liefert die Summenregel für $A \cap B = (A \cap B') \cup \{b\}$: $|(A \cap B') \cup \{b\}| = |(A \cap B')| + 1$. Also:

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= \left|A \cup B'\right| \\
&= |A| + |B'| - |A \cap B'| \\
&= |A| + (|B| - 1) - (|A \cap B| - 1) \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| \qquad \square
\end{aligned}$$

Inklusions-Exklusionsprinzip: ein Beispiel

Wie viele Folgen der Länge acht über der Menge $\{0, 1\}$ fangen mit Null an oder enden mit 11 ?

$$A = \{w \in \{0, 1\}^8 \mid \exists x \in \{0, 1\}^7 : w = (0, x)\}$$
$$B = \{w \in \{0, 1\}^8 \mid \exists y \in \{0, 1\}^6 : w = (y, 1, 1)\}$$
$$A \cap B = \{w \in \{0, 1\}^8 \mid \exists z \in \{0, 1\}^5 : w = (0, z, 1, 1)\}$$

$$\rightsquigarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160.$$

Inklusions-Exklusionsprinzip II

Satz 10: Es seien A, B, C endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

Beweis: $|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|)$

Ein Induktionsbeweis ist viel aufwändiger (siehe Meinel-Buch). $\square$

Die Formel lässt sich weiter verallgemeinern.
Man muss immer wieder alternierend “zuviel gezählte” Elemente abziehen bzw. zuviel abgezogene Elemente draufzählen.

Inklusions-Exklusionsprinzip III

Zum Formulieren des allgemeinen Prinzips benötigen wir noch eine Notation:
Für eine Menge A und eine natürliche Zahl k (meist: $0 \leq \ell \leq |A|$) bezeichnet

$$\binom{A}{\ell}$$

die *Menge der ℓ-elementigen Teilmengen* von A.

Satz 11: Es seien $A_0, \ldots, A_{k-1}$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$\left|\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i\right| = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{k-\ell-1} \left(\sum_{I \in \binom{[k]}{\ell}} \left|\bigcap_{j \in I} A_j\right| \right)$$

Inklusions-Exklusionsprinzip konkret

Satz: Es seien $A_0, \ldots, A_{k-1}$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$\left|\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i\right| = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{k-\ell-1} \left(\sum_{I \in \binom{[k]}{\ell}} \left|\bigcap_{j \in I} A_j\right| \right)$$

Für $k = 2$ bedeutet dies:

$$(-1)^{2-1-1}(|A_0| + |A_1|) + (-1)^{2-2-1}|A_0 \cap A_1|$$

wie wir bereits wissen.

Wenn man das I-E-Prinzip nicht beachtet...

Studenten haben 28 Vorlesungswochen.
Häufig entfallen davon sowieso noch eine je Semester.
Es verbleiben also noch 26 Wochen.
M.a.W.: Studenten haben das halbe Jahre frei, also (gerundet) 183 Tage frei.
Wir müssen noch berücksichtigen, dass die Wochenenden auch frei sind.
Das sind weitere 52 freie Tage. $\leadsto$ 232 Tage sind frei.
Auch fleißige Studenten arbeiten an 8 der 24 Stunden des Tages nicht, d.h. an einem Drittel des Jahres, das sind rund 122 Tage.
M.a.W.: 354 Tage sind arbeitsfrei.
Von den verbleibenden 11 Arbeitstagen sind noch die Feiertage abzuziehen:
3 Tage Weihnachten, 2 Tage Ostern, 2 Tage Pfingsten, 1 Tag Nationalfeiertag sowie der Tag der Arbeit.
Es verbleiben nur noch zwei mögliche Arbeitstage:
das sind aber Rosenmontag und Faschingsdienstag.

Funktionenanzahlen I

Schreibweise: B^A ist die Menge aller totalen Funktionen von A nach B.

Satz 12: Für endliche Mengen A, B gilt: $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Beweis: Jedem Element aus A können $|B|$ verschiedene Elemente zugeordnet werden. Die Zuordnung der Elemente aus B erfolgt unabhängig für verschiedene Elemente aus A. Mit einfacher Induktion über die Größe von A folgt daher:

$$\left|B^A\right| = \underbrace{|B| \cdots |B|}_{|A| \text{ mal}} = |B|^{|A|}.$$

$\square$

Potenzmengen

Ähnlich wie oben gilt auch im endlichen Fall:

Satz 13: Für jede endliche Menge M gilt: 2^M und $\{0,1\}^M$ sind gleichmächtig.

Beweis: über Indikatorfunktion χ_N zu $N \subseteq M$

Aus dem Zusammenhang mit Indikatorfunktionen folgt unmittelbar:

Satz: Für jede endliche Menge M gilt: $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

Binomialkoeffizienten

Gilt $n = |A|$, so schreiben wir auch:

$$\binom{n}{\ell} := \left|\binom{A}{\ell}\right|$$

und nennen den linken Ausdruck *Binomialkoeffizienten*, gelesen n *über* ℓ.

Binomialkoeffizienten—ein kombinatorischer Beweis

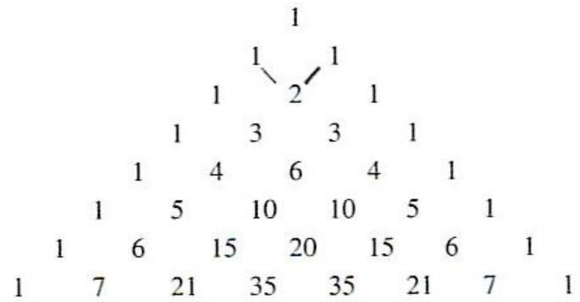
Satz: $\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} = 2^n$.

Beweis: Wir führen einen *kombinatorischen Beweis*:
Es sei A eine n-elementige Menge.
Für die Potenzmenge wissen wir: $\left|2^A\right| = 2^n$.
Die Potenzmenge lässt sich bezüglich der Mächtigkeit in Klassen einteilen.
Daher liefert die Summenformel:

$$\left|\bigcup_{\ell=0}^{n} \binom{A}{\ell}\right| = \sum_{\ell=0}^{n} \left|\binom{A}{\ell}\right| = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} = 2^n.$$

Ein Induktionsbeweis ist viel aufwändiger (siehe Meinel-Buch). $\square$

Exkurs: Pascalsches Dreieck



Satz: Es seien $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $1 \leq k \leq m$.

Dann gilt:

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}.$$

Beweis: Wir führen einen kombinatorischen Beweis.

Es sei A eine beliebige $(m+1)$-elementige Menge und $a \in A$ fest gewählt.

Für jedes k, $1 \leq k \leq m$, lässt sich $\binom{A}{k}$ zerlegen in

$A_1 = \{X \subseteq A \mid a \in X, |X| = k\}$ und $A_2 = \{X \subseteq A \mid a \notin X, |X| = k\}$.

$\leadsto \binom{m+1}{k} = \binom{|A|}{k} = \left|\binom{A}{k}\right| = |A_1| + |A_2|$.

Es gibt offensichtliche Bijektionen von A_1 auf $\binom{A \setminus \{a\}}{k-1}$ und von A_2 auf $\binom{A \setminus \{a\}}{k}$. $\leadsto$

$|A_1| + |A_2| = \binom{|A \setminus \{a\}|}{k-1} + \binom{|A \setminus \{a\}|}{k}$, was wegen $|A| = m+1$ die Beh. liefert. $\square$

Funktionenanzahlen II

Erinnerung: Fakultätsfunktion

Satz 14: Es sei A eine endliche Menge. Die Anzahl der injektiven Funktionen $f : A \to A$ beträgt $(|A|)!$.

Beweis: per Induktion über die Mächtigkeit von A
Für $A = \emptyset$ stimmt es; die einzige Funktion in $\emptyset^{\emptyset}$ ist injektiv. (Warum ?)
Betrachte eine n-elementige Menge A, $n \geq 1$.
Wähle $a, b \in A$ beliebig. $A' = A \setminus \{a\}$ und $A'' = A \setminus \{b\}$ sind gleichmächtig.
Nach IV gibt es $(n-1)\,!$ viele Injektionen von $[n-1]$ nach $[n-1]$.
Jede dieser Injektionen g liefert, komponiert mit Bijektionen $\phi : [n-1] \to A'$ und $\psi : [n-1] \to A''$ eine Injektion f von A nach A mit $f(a) = b$ vermöge $f(x) = \psi(g(\phi^{-1}(x)))$ für $x \in A'$.
Umgekehrt liefert jede Injektion f von A nach A mit $f(a) = b$ eine Injektion $g : [n-1] \to [n-1]$ mit $g(j) = \psi^{-1}(f(\phi(j)))$.

Die Summenformel liefert nun die Behauptung (für “unser” $a \in A$):

$$\begin{aligned}
|\{f : A \to A \mid f \text{ ist injektiv}\}| &= \left|\bigcup_{b \in A} \{f : A \to A \mid f \text{ ist injektiv} \wedge f(a) = b\}\right| \\
&= \sum_{b \in A} |\{f : A \to A \mid f \text{ ist injektiv} \wedge f(a) = b\}| \\
&= \sum_{b \in A} (n-1)\,! = |A|(n-1)\,! = n\,!
\end{aligned}$$

Auch hier gäbe es ein alternatives kombinatorisches Argument:

Betrachte $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Dem ersten Element a_1 können n verschiedene Elemente zugeordnet werden.

Wegen der Injektivität können dem zweiten Element a_2 nur noch $n-1$ verschiedene Elemente zugeordnet werden usw.

Dem letzten Element a_n kann dann nur noch ein Element zugeordnet werden. $\square$

$\boxed{\textbf{Etwas fortgeschrittene Kombinatorik:}}$ Doppeltes Abzählen

In der Kombinatorik heißt eine Relation $I \subseteq S \times T$ auch *Inzidenz* und $\iota = (S, T, I)$ heißt *Inzidenzsystem*.

Gilt $(a, b) \in I$, so nennen wir a und b auch (I-)inzident.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

Für $a \in S$ sei $\iota(a)$ die Zahl der mit a inzidenten $b \in T$.

Für $b \in T$ sei $\iota(b)$ die Zahl der mit b inzidenten $a \in S$.

Regel vom Doppelten Abzählen: $\sum_{a \in S} \iota(a) = \sum_{b \in T} \iota(b)$.

Warum gilt die Regel: Veranschaulichung durch *Inzidenzmatrix*

Für $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $T = \{b_1, \ldots, b_n\}$ stelle $m \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$ auf mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (a_i, b_j) \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\iota_1(a_i)$: Zahl der Einsen in der i-ten Zeile
$\iota_2(b_j)$: Zahl der Einsen in der j-ten Spalte

Teileranzahlen

$t(n)$: Zahl der Teiler der Zahl n

$\bar{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j)$: Durchschnittliche Anzahl der Teiler

Inzidenzsystem: $S = T = \{1, \ldots, n\}$ mit $I = |$ (Teilerrelation).

Offenbar gilt: $\iota_2(j) = t(j)$ für $j \leq n$.

Ebenso leicht: $\iota_1(j) = \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$.

$$\rightsquigarrow \quad \bar{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \iota_2(j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \iota_1(j) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \approx \ln(n) \text{ harmonische Reihe}$$

Etwas fortgeschrittene Kombinatorik:

Das Sonnenblumenlemma von Erdös und Rado

Es sei M eine Menge und $\mathcal{M} \subseteq 2^M$ ein Mengensystem.
Def.: Ein Teilsystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ mit $\emptyset \notin \mathcal{S}$ heißt *Sonnenblume* mit Kern K gdw. $\forall X, Y \in \mathcal{S} : X \cap Y = K \vee X = Y$. Für $X \in \mathcal{S}$ heißt $X \setminus K$ auch *Blütenblatt*.

Satz: (Sonnenblumenlemma) Gibt es ein $s \geq 1$, sodass $\forall X \in \mathcal{M} : |X| = s$, und gilt $|\mathcal{M}| > s!(k-1)^s$, so enthält $\mathcal{M}$ eine Sonnenblume $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ mit wenigstens k Blütenblättern.

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis über s.
Für $s = 1$ (IA) enthält $\mathcal{M}$ nur einelementige Mengen. Gilt $|\mathcal{M}| > (k-1)$, so ist $\mathcal{M}$ selbst eine Sonnenblume mit leerem Kern und wenigstens k Blütenblättern.
Es sei die Behauptung für $s < t$ gezeigt (IV). Wir zeigen im IS die Gültigkeit für $s = t$.
Betrachte ein Teilsystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$ mit:

- $\forall X, Y \in \mathcal{T} : X \cap Y = \emptyset \vee X = Y$ sowie
- $\forall Z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{T} \exists X \in \mathcal{T} : Z \cap X \neq \emptyset$.

Gilt $|\mathcal{T}| \geq k$, so ist $\mathcal{T}$ eine Sonnenblume mit leerem Kern und wenigstens k Blütenblättern.
Betrachten wir jetzt den Fall $|\mathcal{T}| < k$.
Bilde die Menge $B = \bigcup\{A \mid A \in \mathcal{T}\}$. Nach Konstruktion gilt: $|B| \leq t \cdot (k-1)$.
Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein Element $x \in B$, das in wenigstens

$$\frac{|\mathcal{M}|}{|B|} > \frac{t!(k-1)^t}{t(k-1)} = (t-1)!(k-1)^{(t-1)}$$

vielen Mengen aus $\mathcal{M}$ enthalten ist. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{M}_x := \{A \setminus \{x\} \mid A \in \mathcal{M} \wedge x \in A\}.$$

Nach Konstruktion gilt $|\mathcal{M}_x| > (t-1)!(k-1)^{(t-1)}$ und $\forall A \in \mathcal{M}_x : |A| = t-1$.

Wir können hierauf also IV anwenden:

$\mathcal{M}_x$ enthält eine Sonnenblume $\mathcal{S}_x$ mit Kern K_x und wenigstens k Blütenblättern.

Damit ist $\mathcal{S} = \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{S}_x\}$ eine Sonnenblume in $\mathcal{M}$ mit Kern $K = K_x \cup \{x\}$ mit wenigstens k Blütenblättern. $\square$