Diskrete Strukturen

WiSe 2012/13 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

26. Januar 2013

$\boxed{\textbf{Diskrete Strukturen}}$ Gesamtübersicht

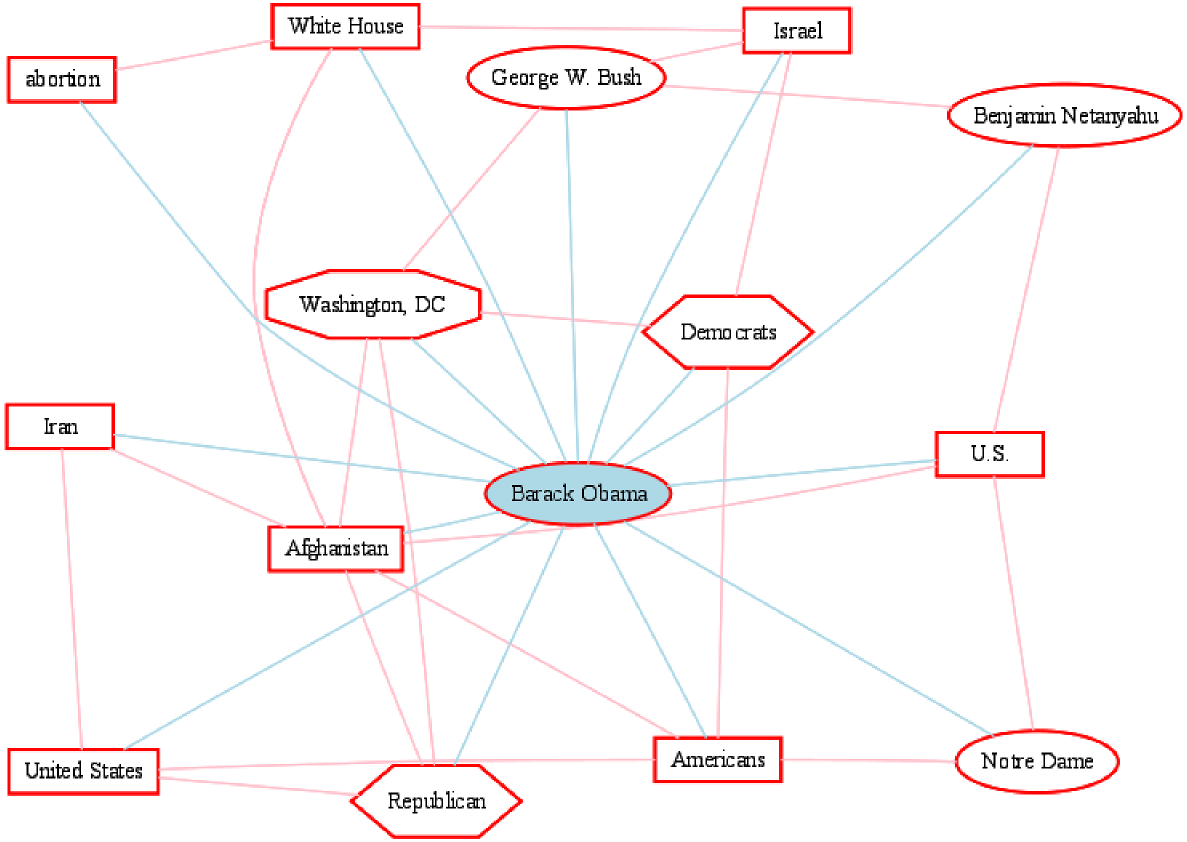
- Organisatorisches und Einführung
- Mengenlehre
- Relationen und Funktionen
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- Diskrete Stochastik
- Graphen
- Grundbegriffe (algebraischer) Strukturen

Eine Einführung in die Graphentheorie

Graphische Darstellungen finden sich an an verschiedenen Stellen des täglichen Lebens. Sie dienen u.a. dazu, (komplizierte) Sachverhalte zu veranschaulichen.

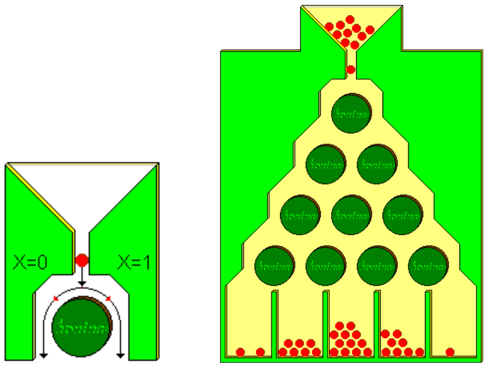
Soziogramme und ähnliche Darstellungen dienen beispielsweise dazu, die Beziehungen zwischen Menschen oder auch Menschen und gewissen Themen nachzuzeichnen.

Die folgende Graphik wurde von dem automatischen Textanalysesystem Textmap erstellt.

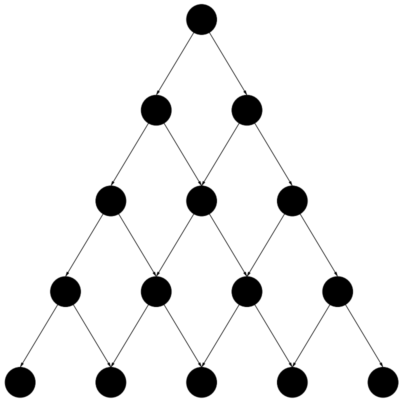

White House
Israel
abortion
George W. Bush
Benjamin Netanyahu
Washington, DC
Democrats
Iran
U.S.
Barack Obama
Afghanistan
United States
Americans
Notre Dame
Republican

Erinnerung: Galton-Brett

mit entsprechenden graphischen Darstellungen



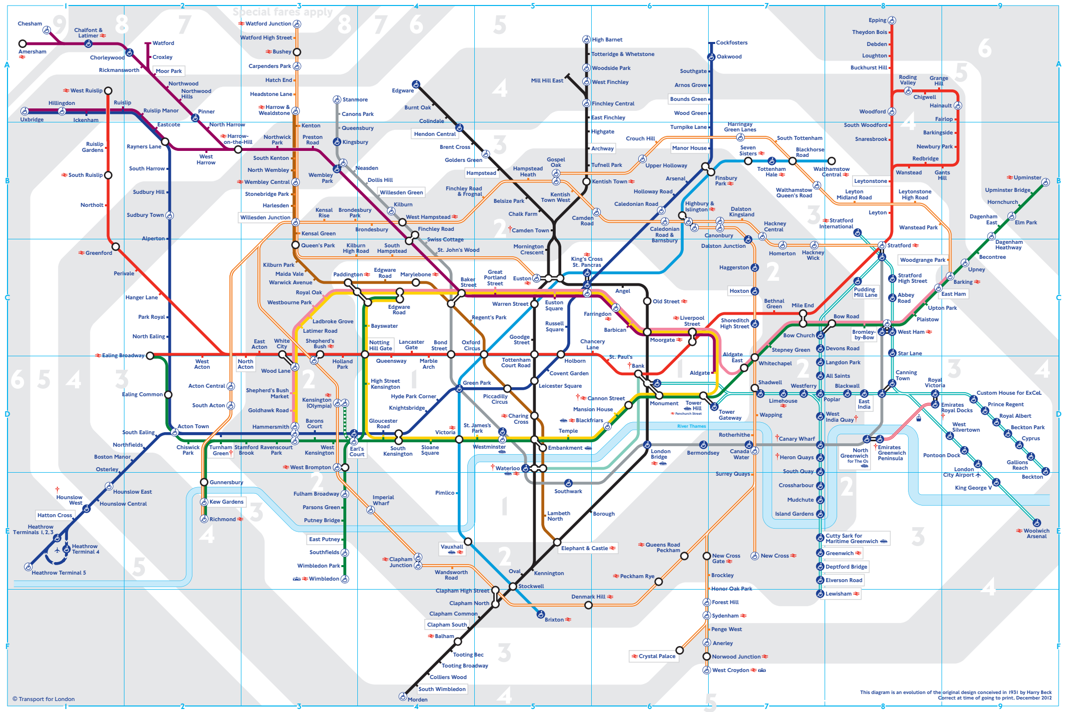
$\Rightarrow$



Achtung: Pfeile an den Strichen !

Der Klassiker: Das Londoner U-Bahn-Netz

Tube map



† Check before you travel

Bank

Waterloo & City line open **0621-2148** Mondays to Fridays and **0802-1837** Saturdays. Closed Sundays and Public Holidays

Camden Town

Sunday **1300-1730** open for interchange and exit only

Canary Wharf

Step-free interchange between Underground, Canary Wharf DLR and Heron Quays DLR stations at street level

Cannon Street

Open until **2100** Mondays to Fridays. Closed Sundays and most Saturdays

Emirates Greenwich Peninsula and Emirates Royal Docks

Special fares apply. Open **0700-2000** Mondays to Fridays, **0800-2000** Saturdays, **0900-2000** Sundays and **0800-2000** Public Holidays. Closed on Christmas Day. Opening hours are extended by one hour in the evening after 1 April 2013 and may be extended on certain events days. Please check close to the time of travel.

Heron Quays

Step-free interchange between Heron Quays and Canary Wharf Underground station at street level

Hounslow West

Step-free access for wheelchair users only

Turnham Green

Served by Piccadilly line trains until **0650** Monday to Saturday, **0745** Sunday and after **2230** every evening. At other times use District line

Waterloo

Waterloo & City line open **0615-2141** Mondays to Fridays and **0800-1831** Saturdays. Closed Sundays and Public Holidays

West India Quay

Not served by DLR trains from Bank towards Lewisham before **1900** on Mondays to Fridays

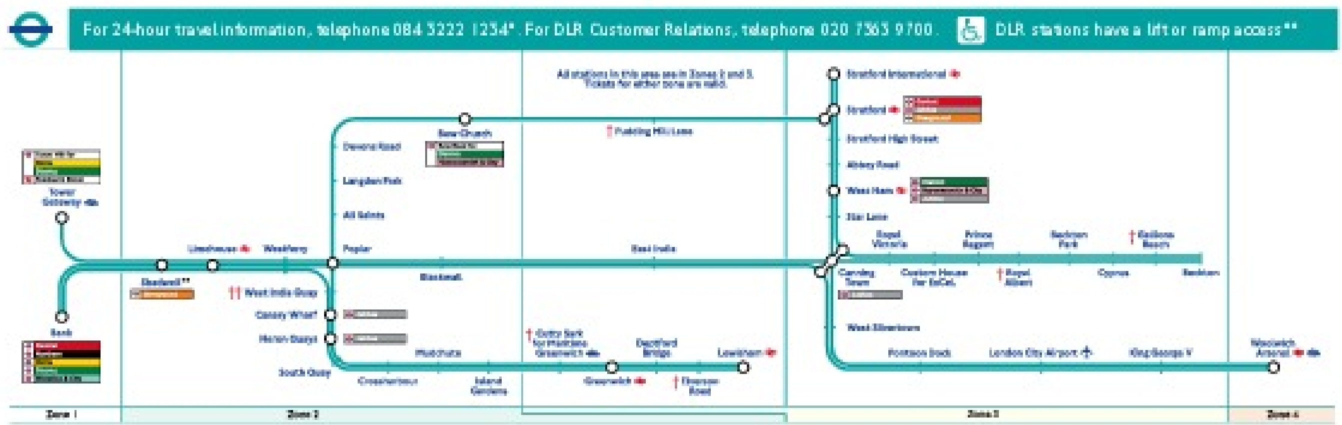
Key to lines

- Bakerloo
- Central
- Circle
- District
- District open weekends, public holidays and some Olympia events
- Hammersmith & City
- Jubilee
- Metropolitan
- Northern
- Piccadilly
- Victoria
- Waterloo & City
- DLR
- London Overground
- Emirates Air Line

MAYOR OF LONDON | tfl.gov.uk | 24 hour travel information 0843 222 1234* | Travel information at stations Help points | tfl.gov.uk/socialmedia | Transport for London | 150 UNDERGROUND

*You pay no more than 5p per minute if calling from a BT landline. There may be a connection charge. Charges from mobiles or other landline providers may vary.

Ausschnitt gefällig: DLR



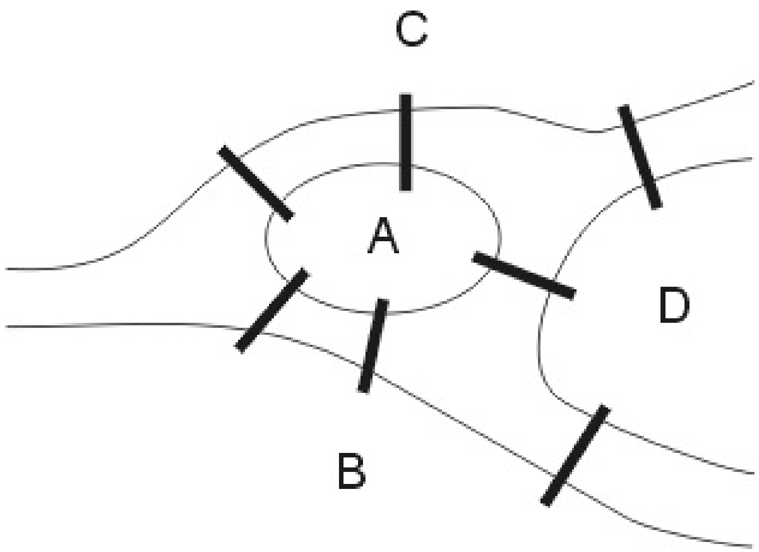
* You pay no more than 5p per minute if calling from a BT landline. There may be a connection charge. Charges from mobiles or other landline providers may vary

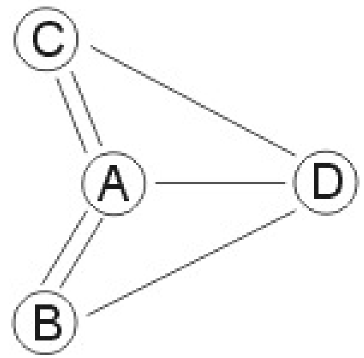
† The first two sets and last two sets of doors on a three-carriage train will not open at Cutty Sark for Maritime Greenwich, Pudding Mill Lane, Royal Albert, Gallions Reach or Elverson Road stations. Please use the centre of the train

†† At certain times trains from Bank towards Lewisham will not stop at West India Quay station

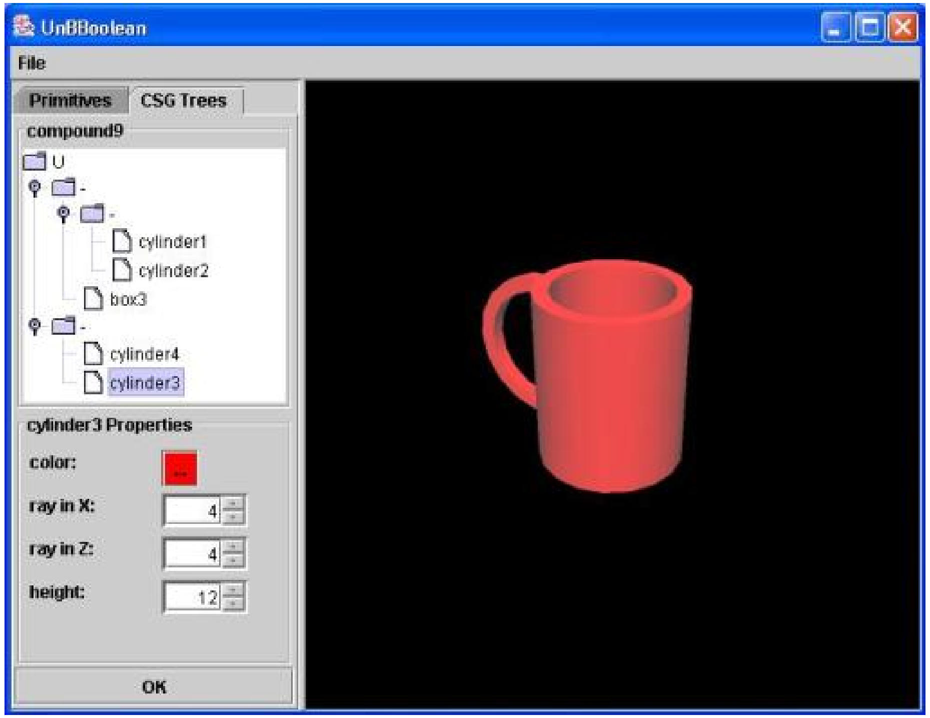
** Lift access to/from DLR platforms at Shadwell station is unavailable until early 2012

Zurück zu den Brücken . . .





Ein Bildschirmfoto von unbboolean



Modellieren — eine wichtige Aufgabe für InformatikerInnen

1. Was sind Gemeinsamkeiten all dieser Bilder?

2. Wo sind die Unterschiede?

3. Wie kann ich das Wesentliche dieser Objekte (mathematisch) beschreiben?

4. Wie kann ich dies demgemäß auf einem Rechner darstellen?

5. Wie sehen also möglicherweise Datenstrukturen und darauf wiederum Operationen / Algorithmen aus?

Definitionsversuche

Ein *Graph* G ist gegeben durch ein Paar von Mengen (V, E).
V ist die Menge von *Knoten* oder *Punkten* oder *Ecken*.
E ist die Menge von *Kanten*, die die Verbindungen zwischen Punkten ausdrücken soll.

Wie hängen Knoten und Kanten zusammen?

Hierfür gibt es verschiedene Formalisierungsmöglichkeiten, die wir jetzt durchsprechen.

1. Möglichkeit: gerichteter Multigraph

Wir betrachten zwei Abbildungen $\alpha : E \to V$ und $\omega : E \to V$.
α liefert zu jeder Kante ihren *Anfangsknoten*.
ω liefert zu jeder Kante ihren *Zielknoten*.

Hiermit lassen sich *gerichtete Multigraphen* beschreiben:
Jede Kante e hat nämlich eine Richtung: von $\alpha(e)$ nach $\omega(e)$.
Im Bild drückt man das meist dadurch aus, dass der Verbindungsstrich von $\alpha(e)$ nach $\omega(e)$ eine Pfeilspitze bei $\omega(e)$ erhält.
Solche Kanten mit Richtungsangabe nennt man auch *Bögen*.
Beachte: Zwei verschiedene Kanten können dieselben Anfangs- und Zielknoten besitzen, d.h., zwischen zwei Knoten kann es mehrere unterscheidbare Bögen.
Außerdem kann für eine Kante e gelten: $\alpha(e) = \omega(e)$. Man spricht dann auch von einer *Schlinge*.
Beispiel an der Tafel! (Königsberger Einbahnstraßen)

2. Möglichkeit: gerichteter Graph

Die *Endknotenabbildung* $\eta : E \to V \times V, e \mapsto (\alpha(e), \omega(e))$ ist injektiv.

Dies bedeutet: Zwischen je zwei Knoten u, v gibt es höchstens einen Bogen e von u nach v.

Wir schließen also Mehrfachbögen aus.

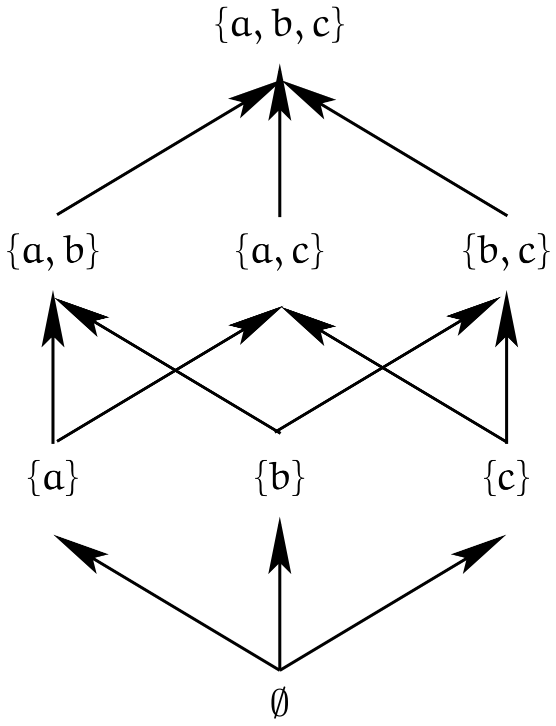
Hiermit modellieren wir *gerichtete Graphen*.

Alternatives Modell: E ist Binärrelation auf V.

Wichtige Beobachtung: Jede Binärrelation ist auffassbar als ein gerichteter Graph. Die Bogenmenge jedes gerichteten Graphen ist eine Binärrelation, die *Bogenrelation*, auch genannt *Adjazenz(relation)*.

Wichtige Darstellung *Adjanzenzmatrix*: Die Relationenmatrix der Bogenrelation. Jede $n \times n$-Matrix mit $\{0, 1\}$-Einträgen lässt sich als gerichteter Graph deuten.

Ein Beispiel Inklusionsbeziehungen



3. Möglichkeit: ungerichteter Graph

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, also $E \subseteq V \times V$.

Ist E symmetrisch, so bedeutet dies:

Gibt es einen Bogen von u nach v, so gibt es auch einen von v nach u.

Graphisch werden wir dann beide Verbindungen identifizieren und die Pfeilspitzen weglassen.

Wir können so einen *ungerichteten Graphen* auch beschreiben durch ein Paar (V, E), wobei nun $E \subseteq 2^V$ mit $e \in E \implies 1 \leq |e| \leq 2$ gilt.

Schlingen sind hierbei einelementige Knotenmengen.

Diese sind in Anwendungen oft unwichtig. Besitzt ein ungerichteter Graph keine Schlingen, so heißt er *schlicht*.

Frage: Wie sieht die Adjanzenzmatrix eines schlichten ungerichteten Graphen aus?

Wir betrachten im Folgenden meist ungerichtete schlichte Graphen (wenn wir nichts anderes vermerken).

Weitere Varianten (oft interessant in Anwendungen):

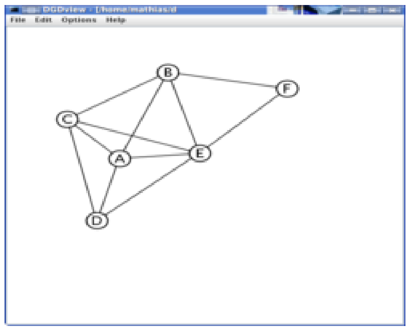
Wir können Knoten oder Kanten eines Graphen beschriften.
Dies geschieht durch die Einführung von Abbildungen $V \to B_V$ bzw. $E \to B_E$, wobei B_V bzw. B_E die Mengen sind, mit deren Elementen die Beschriftung erfolgen soll.
“Beschriften” ist hierbei abstrakt zu verstehen, auch das Verwenden unterschiedlicher Farben (wie beim U-Bahnnetz) ist so eine Beschriftung.
Oft sind auch Zahlenangaben (Kosten, Gewichte, . . .) interessant.

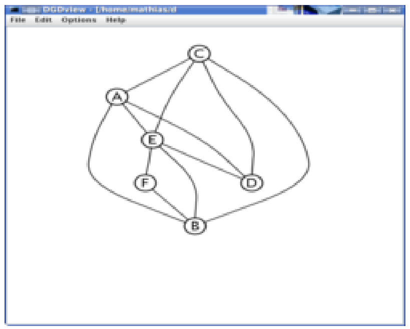
Man kann auch ungerichtete Multigraphen einführen.
Dies haben wir bei den Königsberger Brücken getan.
Solche Multigraphen enthalten dann Mehrfachkanten; m.a.W.: Jede höchstens zweielementige Knotenmenge (Kante) erhält dann eine *Vielfachheit* zugeordnet.

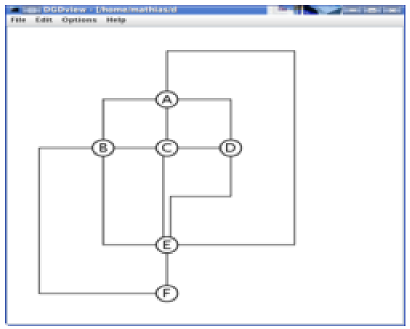
Manchmal kommt es auch auf die Reihenfolge der Bögen bei einem Knoten an (s. unbboolean).

Darstellung von Graphen

Graphen (als abstrakte Objekte) lassen sich sehr unterschiedlich graphisch darstellen. Dies ist Gegenstand aktueller Forschungen auch an der Universität Trier, insbesondere beim Kollegen Diehl.
Anbei finden Sie drei Zeichnungen desselben Graphen mit der Hilfe unterschiedlicher Algorithmen, wie Sie sie auf der dortigen Lehrstuhlseite finden.







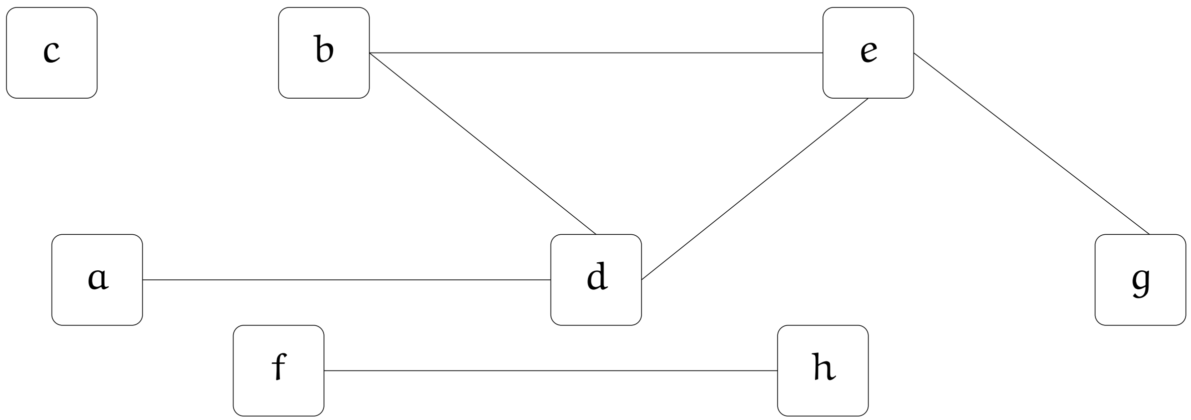
Unsere wesentliche Definition

Def.: Ein (ungerichteter, schlichter, endlicher) *Graph* G ist gegeben durch ein Paar (V, E);
V ist seine endliche *Knotenmenge* und
$E \subseteq \binom{V}{2}$ seine *Kantenmenge*.
$|V|$ heißt auch *Ordnung* von G.
Ein Knoten v heißt mit einer Kante e *inzident*, wenn $v \in e$ gilt.
Die beiden mit einer Kante e inzidenten Knoten sind ihre *Endknoten*, und e *verbindet* diese Knoten.
Für eine Kante $\{x, y\}$ schreiben wir kürzer auch xy (oder yx).
Durchweg sind unsere Graphen *nicht leer*, d.h., für die Knotenmenge V gilt: $V \neq \emptyset$.

Beispiele

- $G_1 = (\{a, b, c\}, \{ab\})$,
- $G_2 = (\{a, b, c\}, \{bc\})$,
- $G_3 = (\{x, y\}, \{xy\})$,
- $G_4 = (\{1, 2, 3\}, \{12, 23\})$,
- $G_5 = (\{1, 2, 3\}, \{12, 23, 13\})$,
- $G_6 = (V_6 := \{(1; 3), (2; 4), (3; 5)\}, \{IJ \mid I, J \in V_6, I \cap J \neq \emptyset\})$.

Noch ein Beispiel (mit Knotenbezeichnungen)



Dies ist eine graphische Darstellung für $G = (V, E)$ mit
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und
$E = \{ad, bd, be, de, eg, fh\}$.

Zur Inzidenzrelation

$G = (V, E)$ definiert die Inzidenzrelation $I \subseteq V \times E$ durch $(v, e) \in I$ gdw. $v \in e$ gdw. v ist mit e inzident.

Die Anzahl der Kanten, mit denen ein Knoten v inzident ist, heißt auch *Grad* oder *Valenz* von v, geschrieben $d(v)$.

Folgerung: Jede $n \times m$-Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ lässt sich als Relationenmatrix einer Inzidenzrelation deuten und liefert so einen Graphen, sofern in jeder Spalte genau zwei Einsen stehen.

Bsp. an der Tafel.

Nachbarschaft

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Sind $u, v \in V$ zwei Knoten, so heißen u, v *benachbart* oder *adjazent*, falls $uv \in E$ gilt. u heißt dann auch *Nachbar* von v.
$N(v)$ ist die Menge aller Nachbarn von v:

Lemma: $d(v) = |N(v)|$.

Beweis: Da G keine Mehrfachkanten enthält, gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Kanten mit Endknoten v und der Menge $N(v)$. $\square$

Doppeltes Abzählen

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter, endlicher Graph. Dann gilt: $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$.

Beweis: Da G schlicht, besteht E aus zweielementigen Teilmengen von V.
Nach der Graddefinition wird in der Summenbildung jede Kante daher genau zweimal berücksichtigt. $\square$

Diese Technik des *doppelten Abzählens* kann man sich an der Relationenmatrix der Inzidenzrelation veranschaulichen.

Isomorphie

Wir wollen im Folgenden Graphen und ihre Eigenschaften untersuchen.
Es ist dabei gleichgültig, wie wir Knoten und Kanten konkret benennen.
Dies führt auf folgenden Begriff:

Def.: Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, i.Z. $G \simeq G'$ gdw. es eine Bijektion $\phi : V \to V'$ gibt, sodass

$$xy \in E \iff \phi(x)\phi(y) \in E'.$$

$\phi : V \to V'$ heißt dann auch *Isomorphismus* von G auf G'.

Zu den Beispielen:
$G_1 \simeq G_2$; wähle z.B. $\phi : a \mapsto c, b \mapsto b, c \mapsto a$. (Gibt es eine andere Wahl?)
G_2 und G_3 sind nicht isomorph, da ihre Knotenmengen nicht gleichmächtig sind.
Gibt es ein G_i, $i < 6$, das isomorph zu G_6 ist?

Vom Nutzen der Isomorphie 1

Isomorphe Graphen sollen “gleiche Eigenschaften” haben.
Dafür wesentlich ist die folgende Überlegung:
Satz: Es seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen und $\phi : V \to V'$ ein Isomorphismus von G auf G'.
(1) ϕ^{-1} ist ein Isomorphismus von G' auf G.
(2) $\phi_E : E \to E', xy \mapsto \phi(x)\phi(y)$ ist eine Bijektion.

Beweis: (1) ist unmittelbar klar.

(2) Da ϕ Isomorphismus, ist das Bild $\phi_E(e)$ einer Kante $e \in E$ eine Kante in E'.
Betrachte $e' = x'y' \in E'$. Da ϕ bijektiv, gibt es hierzu eindeutig $x, y \in V$ mit $x' = \phi(x)$ und $y' = \phi(y)$. Da ϕ Isomorphismus und $x'y' = \phi(x)\phi(y)$, folgt $xy \in E$. Daher ist ϕ_E eine Surjektion.
Betrachte eine Kante $e' = x'y' \in E'$ mit $\phi_E(e_1) = \phi_E(e_2) = e'$. Es sei $e_1 = xy$ und demzufolge $e' = \phi(x)\phi(y)$, o.E. mit $\phi(x) = x'$ und $\phi(y) = y'$. Für gewisse Knoten $u, v \in E$ muss aber auch gelten: $uv = e_2$, also (o.E.) $\phi(u) = x'$ und $\phi(v) = y'$, da $\phi_E(e_2) = e'$. Damit wäre aber (da wir keine Mehrfachkanten haben) $u = x$ und $v = y$. Also gilt $e_1 = e_2$, d.h., ϕ_E ist injektiv. $\square$

Vom Nutzen der Isomorphie 2

Satz: Es seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen und $\phi : V \to V'$ ein Isomorphismus von G auf G'. Für jeden Knoten $v \in V$ gilt dann: $d(v) = d(\phi(v))$.
Die Mächtigkeit von Knoten- und Kantenmenge sind also ebenso wie der Knotengrad Größen, die unter Isomorphie erhalten bleiben.
Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Invarianten.

Beweis: Betrachte einen Knoten $v \in V$ und sein Bild $\phi(v) \in V'$.

Jede Kante $vw \in E$ wird durch ϕ_E auf die Kante $\phi(v)\phi(w)$ abgebildet.

Da ϕ_E injektiv ist, gilt:

$d(v) = |\{vw \mid vw \in E\}| = |\{\phi(v)\phi(w) \mid vw \in E\}| \leq |\{\phi(v)x \mid \phi(v)x \in E'\}| = d(\phi(v))$. (*)

Betrachte eine Kante $\phi(v)x \in E'$.

Da ϕ Isomorphismus, gilt: $\phi_E^{-1}(\phi(v)x) = \phi^{-1}(\phi(v))\phi^{-1}(x) = v\phi^{-1}(x) \in E$.

Also gilt: $\phi^{-1}(x) \in N(v)$, und mithin $\phi(v)x \in \{\phi(v)\phi(w) \mid vw \in E\}$.

Daher ist die einzige Ungleichung in (*) tatsächlich eine Gleichheit. $\square$

Spezielle Graphen: Wege

Der Begriff der Isomorphie gestattet es, konkrete Graphen zu benutzen, um ganze Klassen von Graphen zu bezeichnen.

Es sei $k \geq 0$.
Ein Graph $P^k = (V_k, E_k)$ heißt ein *Weg (der Länge k)*, falls
$V_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ und $E_k = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$,
wobei die x_i paarweise verschieden sind.
Die Knoten x_0 und x_k sind die *Endknoten* von P^k.
Beobachte: Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine Länge.

Allgemeiner sprechen wir jeden Graphen, der isomorph zu P^k ist, als Weg (der Länge k) oder sogar als P^k an. Finden Sie Wege unter den Beispielen?

Spezielle Graphen: Kreise

Es sei $k \geq 3$.
Ein Graph $C^k = (V'_k, E'_k)$ heißt ein *Kreis (der Länge k)* , falls
$V'_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ und $E'_k = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_0\}$,
wobei die x_i paarweise verschieden sind.
Beobachte: Die Anzahl der Kanten eines Kreises ist seine Länge, und ebensolches gilt für die Anzahl seiner Knoten.

Allgemeiner sprechen wir jeden Graphen, der isomorph zu C^k ist, als Kreis (der Länge k) oder sogar als C^k an.

Obergraphen, Untergraphen und Zusammenhang

Def.: Sind $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen, so heißt G *Untergraph* von (oder in) G' und G' *Obergraph* von G gdw. $V \subseteq V'$ und $E \subseteq E'$.

Def.: $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend* gdw. zu jedem Paar von Knoten $x, y \in V$ gibt es einen Weg in G mit Endknoten x und y.
Einen Weg in G mit Endknoten x und y nennt man auch $x - y$-Weg.

Überlegen Sie: Welche der Beispiele sind zusammenhängend?
Wie sehen zusammenhängende Graphen der Ordnung Eins aus?

Lemma: Sind $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen mit $V = V'$ und ist G zusammenhängender Untergraph von G', so ist G' zusammenhängend.

Zusammenhangskomponenten und Zusammenhang

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Betrachte die Relation $W \subseteq V \times V$: $(x, y) \in W$ gdw. es gibt einen $x - y$-Weg.
Lemma: W ist eine Äquivalenzrelation.
Eine Äquivalenzklasse von W heißt auch *Zusammenhangskomponente* von G.
Man bestimme die Zusammenhangskomponenten von den Beispielgraphen!
$G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend* gdw. V ist Zusammenhangskomponente von G.

Satz: W ist die reflexiv-transitive Hülle von E (aufgefasst als symmetrische Relation), also: $W = E^*$.
Wir kennen also bereits Algorithmen zur Berechnung von W aus G!
Dazu beobachte genauer:
Lemma: Es gibt einen $x - y$-Weg der Länge höchstens k in $G = (V, E)$ gdw. $(x, y) \in (E \cup \Delta_V)^k$.

Bemerkungen

Der Begriff des Zusammenhangs zeigt deutlich die Urverwandschaft von Graphentheorie und Topologie, wobei letztere heute ein Zweig der Analysis ist.

“Zusammenhang” und verwandte Begriffe haben leicht ersichtliche Anwendungen, wenn es z.B. um die Zuverlässigkeit von Computernetzen geht.

Weniger naheliegend erscheint vielleicht die Computergraphik, aber man denke daran, dass sich Pixelbilder als gitterartige Graphen auffassen lassen, und dann könnte “Zusammenhang” bei der Interpretation der “Füllfunktion” bei Malprogrammen dienen.

Charakterisierungen

In der Graphentheorie sind Sätze wichtig, die Klassen von Graphen kennzeichnen.
Wir werden im Folgenden einige einfache Sätze kennenlernen.
Oft liefern solche Charakterisierungen auch Verfahren, wie man z.B. feststellen kann, ob ein Graph ein Weg ist.

Satz: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ der Ordnung mindestens zwei ist ein Weg gdw. G besitzt zwei Knoten vom Grad eins und $|V| - 2$ Knoten vom Grad zwei.
$x - y$-Wege der Länge k in $G = (V, E)$ lassen sich auch als Knotenfolgen $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ beschreiben, wobei $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschieden sind und $x_i \in N(x_{i-1})$ für $i = 1, \ldots, k$ gilt.

Beweis: Es ist klar, dass jeder Weg mit wenigstens zwei Knoten (also der Länge wenigstens Eins) die Eigenschaften besitzt.
Es sei umgekehrt $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $|V| \geq 2$, mit zwei Knoten u, v vom Grad eins und $|V| - 2$ Knoten vom Grad zwei.
Wir konstruieren induktiv eine Bijektion $\phi : V \to \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $k = |V| - 1$ wie folgt:
Wir legen anfangs fest: $\phi(u) = x_0$ (und $\phi(v) = x_k$).
Sei nun schon definiert: $u = \phi^{-1}(x_0), \phi^{-1}(x_1), \ldots, \phi^{-1}(x_\ell)$.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
(1) $d(\phi^{-1}(x_\ell)) = 1$ und $\ell > 0$. Da G zusammenhängend, muss dann $\phi^{-1}(x_\ell) = v$ gelten.
Wir haben also die Bijektion vollständig beschrieben.
(2) $d(\phi^{-1}(x_\ell)) = 2$ oder $\ell = 0$. $\phi^{-1}(x_\ell)$ besitzt (außer—sofern definiert—$\phi^{-1}(x_{\ell-1})$) genau einen (weiteren) Nachbarn w in G. Setze $\phi(w) = x_{\ell+1}$.
Aus der Konstruktion ergibt sich durch Induktion auch leicht die Tatsache, dass ϕ Isomorphismus ist. $\square$

Charakterisierung von Kreisen

Satz: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ der Ordnung mindestens drei ist ein Kreis gdw. G besitzt nur Knoten vom Grad zwei.

Beweis zur Übung.

Wie bereits bei Wegen bemerkt, kann man auch Kreise in Graphen als Knotenfolgen angeben.

Zur Größe zusammenhängender Graphen

Satz: Ein zusammenhängender Graph der Ordnung n hat wenigstens $n - 1$ Kanten.

<u>Beweis:</u> Wir führen einen Beweis über die Ordnung der Graphen.

Für $n = 0, 1, 2$ stimmt die Behauptung, wie man leicht sieht.

Angenommen, die Behauptung stimme für alle Graphen bis zu der Ordnung $n = m$.

Es sei G ein Graph der Ordnung $n = m + 1 \geq 3$.

Wenn alle Knoten einen Grad von mindestens zwei haben, hat der Graph wenigstens $2n \geq n - 1$ Kanten, und die Behauptung stimmt unmittelbar.

Andernfalls hat G einen Knoten x vom Grad Eins.

Wege in G enthalten x höchstens als Endknoten.

Daher ist, falls G zusammenhängend ist, auch der Graph G' zusammenhängend, der aus G durch Löschen von x (sowie der einzigen inzidenten Kante) entsteht.

Auf G' können wir die Induktionsannahme anwenden, denn G' hat die Ordnung m.

G' enthält daher wenigstens $m - 1$ Kanten, weshalb G wenigstens $n - 1 = m$ Kanten besitzt. $\square$

Abstand in zusammenhängenden Graphen

Def.: Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Die Länge des kürzesten $x-y$-Weges zwischen Knoten $x, y \in V$ ist der *Abstand* von x und y in G, geschrieben $\mathrm{dist}(x, y)$.

Def.: Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (auf X) gdw. für bel. $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*Defininitheit*)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*Symmetrie*)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Dreiecksungleichung*)

Abstand in zusammenhängenden Graphen

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Dann ist dist eine Metrik auf V.

Beweis: Fast alle Eigenschaften sind leicht mit den bisherigen Sätzen einzusehen.

Wir betrachten lediglich die Dreiecksungleichung genauer.

Betrachte also drei Knoten x, y, z.

$\mathrm{dist}(x, z)$ ist durch einen $x - z$-Weg $x = u_0, u_1, \ldots, u_r = z$ der Länge $r = \mathrm{dist}(x, z)$ erklärt,

$\mathrm{dist}(z, y)$ durch einen $z - y$-Weg $z = v_0, v_1, \ldots, v_s = y$ der Länge $s = \mathrm{dist}(z, y)$.

Es sei j die kleinste Zahl mit $u_j \in \{v_0, v_1, \ldots, v_s\}$. Genauer gelte $v_i = u_j$.

Dann ist $P = u_0, u_1, \ldots, u_j = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_s$ ein $x - y$-Weg der Länge $j + (s - i) \leq r + s$, denn $u_0, \ldots, u_j$ ist ein Weg der Länge j von x nach u_j und $v_i, \ldots, v_s$ ist ein Weg der Länge $(s - i)$ von $u_j = v_i$ nach y.

Wegen $\mathrm{dist}(x, y) \leq j + (s - i)$ folgt die Behauptung. $\square$

Bäume

Def.: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein *Baum* gdw. G ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis als Untergraph.

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ ist Baum gdw. G ist zusammenhängend und hat $|V| - 1$ Kanten.

Beweis: Da G zusammenhängend, hat G mindestens $|V| - 1$ Kanten.
Wie man leicht einsieht, gilt die Aussage für Graphen mit ein oder zwei Knoten.
Wir nehmen an, jeder zusammenhängende Graph der Ordnung n mit $n-1$ Kanten ist ein Baum.
Betrachte zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ der Ordnung $n + 1$ mit $|E| = n$.
Nach dem Schubfachprinzip gibt es einen Knoten x vom Grad Eins in G, den kann man löschen, man erhält einen kleineren Graphen, der keinen Kreis enthält.
Da x selbst auch in keinem Kreis enthalten ist, enthält G selbst keinen Kreis als Untergraph.

Umgekehrt: Wir nehmen an, jeder Baum der Ordnung n habe $n-1$ Kanten.
Betrachte nun einen Baum $G = (V, E)$ der Ordnung $n+1$.
Es seien x, y zwei Knoten mit größtmöglichem Abstand $d = \mathrm{dist}(x, y)$ in G.
Sei $x = x_0, \dots, x_d$ ein kürzester $x - y$-Weg.
Wir behaupten: $d(x) = d(y) = 1$.
Wäre nämlich $d(x) > 1$, so müsste für alle Nachbarn x' von x gelten: $\mathrm{dist}(x', y) \in \{d-1, d\}$.
Angenommen, $\mathrm{dist}(x', y) = d$ für einen Nachbarn x' von x.
Sei ein kürzester $x' - y$-Weg beschrieben durch die Knotenfolge $x' = x'_0, \dots, x'_d = y$.
Sei j minimal mit $x_j \in \{x'_0, \dots, x'_d\}$. (So ein j existiert, da $x_d \in \{x'_0, \dots, x'_d\}$.)
Da die Knotenfolge $x' = x'_0, \dots, x'_d = y$ einen Weg beschreibt, gibt es einen eindeutigen Index i mit $x'_i = x_j$.
Dann ist $x_0, x_1, \dots, x_j = x'_i, x'_{i-1}, \dots, x'_1, x'_0$ eine Knotenfolge, die aufgrund der minimalen Wahl von j und i einen Kreis in G beschreibt, im Widerspruch zur Annahme.

Ähnlich kann man ausschließen, dass x zwei Nachbarn x' und x'' mit $\mathrm{dist}(x', y) = \mathrm{dist}(x'', y) = d - 1$ besitzt:

Kürzeste Wege $x' = x'_1, \ldots, x'_d = y$ und $x'' = x''_1, \ldots, x''_d = y$ enthalten x nämlich nicht (da $d = \mathrm{dist}(x, y)$).

Nach "minimaler Indexwahl" von j und i finden wir den Kreis $x, x'_1, \ldots, x'_j = x''_i, \ldots, x''_1$ in G.

Daher gilt: $d(x) = 1$, und entsprechend sieht man: $d(y) = 1$.

Wir können jetzt x zusammen mit der einzigen inzidenten Kante löschen und erhalten einen zusammenhängenden Graphen kleinerer Ordnung n, der keinen Kreis enthält und daher $n - 1$ Kanten besitzt. Mithin hat G selbst n Kanten. $\square$

Charakterisierungen von Bäumen gibt es etliche...

Wir wollen noch eine weitere davon erwähnen:

Satz: Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum gdw. zwischen je zwei Knoten $x, y \in V$ existiert genau ein $x - y$-Weg.

Aufspannende Untergraphen

Def.: Es sei $G' = (V', E')$ ein Untergraph von $G = (V, E)$ mit $V' = V$.
Dann heißt G' auch *aufspannender Untergraph* von G.
Ist G' hierbei ein Baum, so heißt G' auch *Gerüst* oder *Spannbaum* von G.

Satz: $G = (V, E)$ ist zusammenhängend gdw. G besitzt einen Spannbaum.

Beweis: Ist G' ein Gerüst von G, so ist G' insbesondere ein zusammenhängender Teilgraph von G, mithin ist G zusammenhängend.

Sei umgekehrt G zusammenhängend. Wähle $v \in V$ beliebig.

$V_k = \{u \in V \mid \mathrm{dist}(v, u) = k\}$.

Für $k > 0$ und $u \in V_k$ wähle beliebige feste Kante e_u, sodass u ein Endpunkt von e_u und ein anderer in V_{k-1} liegt. (Mindestens eine solche Kante muss es geben!)

Da $G' = (V, \{e_u \mid u \in V \setminus \{v\})$ zusammenhängend ist (das zeigt man leicht per Induktion über k) und $|V| - 1$ Kanten besitzt, ist G' ein Gerüst. $\square$

Eulersche Graphen

Def.: Ein zusammenhängender Graph heißt *Eulersch* gdw. der Grad jedes Knotens ist gerade.
Beispielsweise sind Kreise Eulersche Graphen.

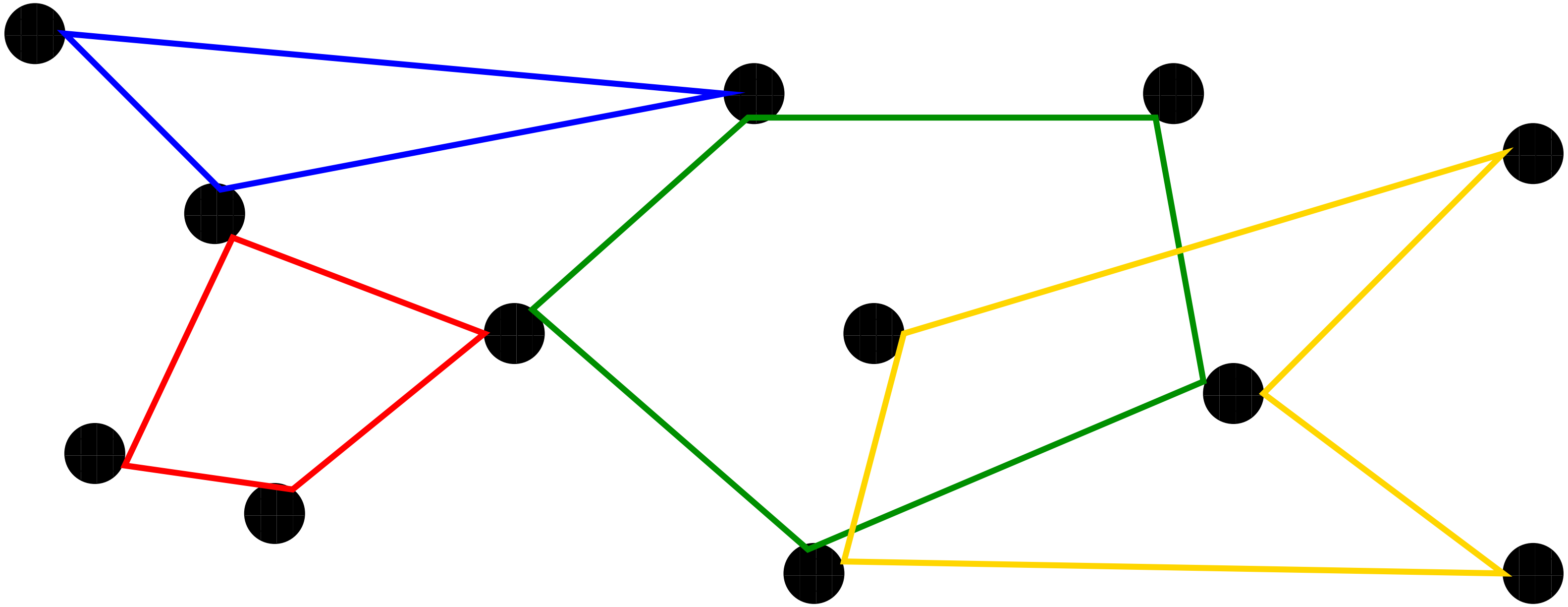
Dieser Begriff hängt eng mit dem Königsberger Brückenproblem zusammmen:

Satz: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist Eulersch gdw. E lässt sich zerlegen in $E_1, \ldots, E_k$, sodass jeder Graph $G_i = (V, E_i)$ nur eine Zusammenhangskomponente V_i mit mehr als einem Knoten besitzt, und (V_i, E_i) ist ein Kreis.

Wir sprechen die Zerlegung aus dem Satz auch als “Kreiszerlegung” an.

M.a.W.: In G ist ein “Rundgang” möglich, der jede Kante genau einmal “benutzt” (Knoten aber womöglich häufiger).

Eulersche Graphen: Ein Beispiel



Wie könnte hier ein “Rundgang” aussehen?

Eulersche Graphen: Zum Beweis

Klar: Wenn eine Kreiszerlegung existiert, sinde alle Grade gerade.
Ein Kreis der Länge drei ist der kleinste Graph, der Eulersch ist und eine triviale Kreiszerlegung besitzt.
Per Induktion zeigen wir stärker: Jeder Graph mit lauter geradgradigen Knoten, der keinen Knoten vom Grad Null besitzt, hat eine Kreiszerlegung.
Angenommen, jeder Graph mit höchstens m Kanten erfüllt die Behauptung.
Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$ mit lauter geradgradigen Knoten ohne Grad-0-Knoten mit $m + 1$ Kanten.
Wähle einen beliebigen Knoten $x_0 = y_0$, zwei seiner Nachbarn x_1, y_1, und (induktiv) einen Nachbarn x_{i+1} von x_i, der ungleich x_{i-1} ist, sowie einen Nachbarn y_{i+1} von y_i, der ungleich y_{i-1} ist, bis ein Nachbarknoten x_j (oder y_j) gewählt werden kann, der bereits bezeichnet wurde.
Dies muss eintreten, da beim “Betreten” eines Knotens nur eine inzidente Kante “benutzt” wurde, ein “Verlassen” dieses Knoten aufgrund seines geraden Grades über eine “unbenutzte” Kante also stets möglich ist, der Prozess aufgrund der Endlichkeit des Graphens aber abbrechen muss.
Ist nun $x_j = x_i$ für $i < j$, so beschreibt die Knotenfolge $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ einen Kreis.
Ist $x_j = y_i$, so beschreibt $y_i, y_{i-1}, \ldots, y_0 = x_0, x_1, \ldots, x_j$ einen Kreis.
Entferne die Kanten des so erhaltenen Kreises aus G sowie Knoten, die nunmehr Grad Null haben.
Dieser neue Graph G' besitzt eine Kreiszerlegung nach Induktionsannahme.
Diese liefert zusammen mit dem “neuen Kreis” eine Kreiszerlegung für G. $\square$

Eulersche Graphen: Von der Kreiszerlegung zum Rundgang

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Eulerscher Graph.
Sei $E_1, \ldots, E_k$ eine Kreiszerlegung von G.
Bilde neuen Graphen $G' = (V', E')$ mit $V' = \{E_1, \ldots, E_k\}$ und E_iE_j ist eine Kante in E' gdw. die durch E_i und E_j beschriebenen Kreise haben einen gemeinsamen Knoten.
Also gibt es eine Abbildung $\kappa : E' \to V$, die E_iE_j einen gemeinsamen Knoten zuordnet. Da G zusammenhängend ist, ist auch G' zusammenhängend.
Sei $G'' = (V', E'')$ ein Gerüst von G'.
Starte in beliebigem Knoten w von G' ("Wurzel") und beschreibe einen "Spaziergang" durch G'' mittels "Tiefensuche".
Beachte hierbei "zyklische Ordnung" auf den Kindknoten, die durch Kreis (in G) vorgegeben ist.
(Wir können G'' also auch als gerichteten geordneten Baum auffassen, wie er uns demnächst häufiger begegnen wird.)
Mithilfe von κ lässt sich der G''-Spaziergang als Rundgang in G deuten.