Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

$\boxed{\textbf{Diskrete Strukturen und Logik}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

$\boxed{\textbf{Graphen und Relationen}}$—Übliche Definition:

Ein *gerichteter Graph* ist eine Struktur $G = (V, E)$ mit zwei Bestandteilen:

- einer Menge V von *Knoten* oder *Punkten* (vertices, nodes),
- einer Menge $E \subseteq V \times V$ von *Kanten* oder *Bögen* (edges, arcs)

$\leadsto$ Jede binäre Relation R über M lässt sich als Kantenmenge des Graphen $G = (M, R)$ auffassen.

Spezielle Graphen: *Nullgraph* O_n mit n Knoten und leerer Kantenmenge.
vollständiger Graph K_n mit n Knoten und Allrelation als Kantenmenge.
Für Informatiker besonders interessant: *endliche Graphen*

Graphiken für **Graphen**

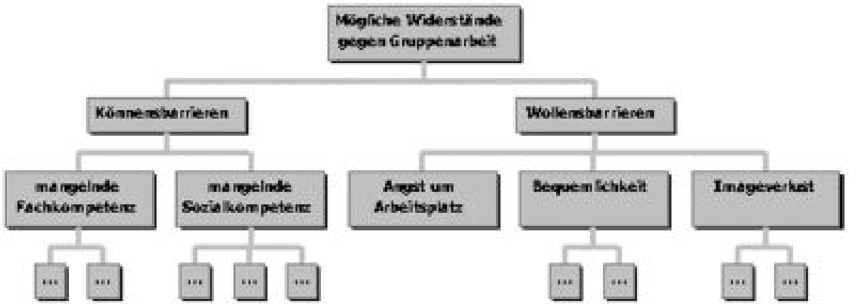
Zeichne Knoten u als (deutliche) Punkte p_u in der Ebene.
Zeichne Bögen (u, v) als *Pfeile*, d.h., einer (stetigen) Kurve von p_u nach p_v mit einer Pfeilspitze, die auf p_v zeigt.
u heißt auch *Anfangsknoten*, v *Endknoten* von (u, v).

Beispiel: an der Tafel

Problem: Auffinden einer guten graphischen Darstellung.
$\leadsto$ Graphenzeichnen als Teilgebiet der Informatik
in TR vertreten durch Diehl, F., Näher; z.B. durch Seminare

Anwendung entnommen: Qualitätsinitiative Berlin-Brandenburg
Die meisten vorgeschlagenen Werkzeuge zum Qualitätsmanagement beruhen auf Graphen:

Beim *Baumdiagramm* wird ein Hauptproblem in logische Untergruppen zergliedert und graphisch dargestellt.

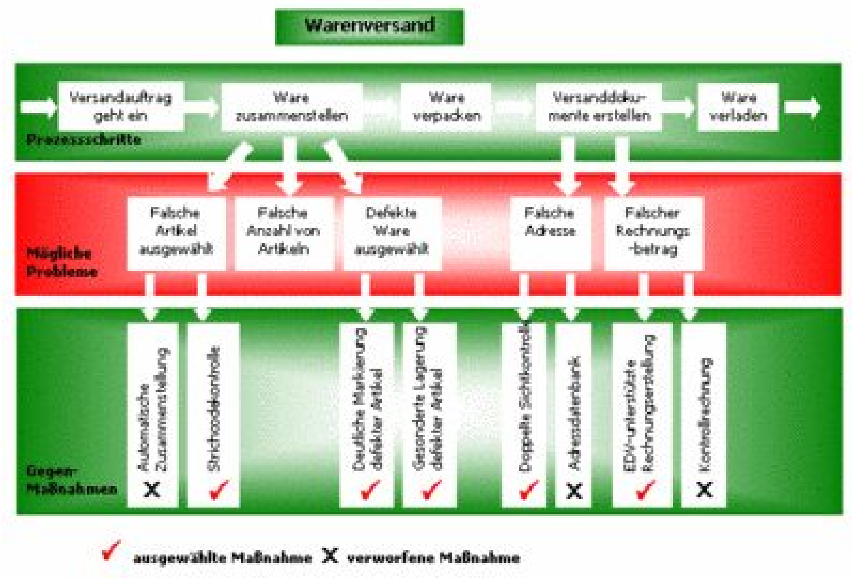


Anwendung entnommen: Qualitätsinitiative Berlin-Brandenburg

Relationsdiagramm: graphische Darstellung eines zentralen Problems und dessen Zusammenhänge mit anderen Faktoren.

Anwendung entnommen: Qualitätsinitiative Berlin-Brandenburg

Ein *Problem-Entscheidungsplan* wird angefertigt, um möglicherweise auftretenden Schwierigkeiten bei der Umsetzung einzelner Teilschritte einer Lösung vorzubeugen



Eigenschaften von Relationen als solche von Graphen

Ist die Kantenrelation reflexiv, so bedeutet dies: der Graph enthält an jedem Knoten x eine *Schlinge* (x, x).
Da Schlingen die Lesbarkeit von Graphen stören und meist für Anwendungen nicht interessieren, betrachtet man meistens *schlingenfreie Graphen*, auch *schlichte Graphen* genannt.

Ist die Kantenrelation symmetrisch, so bedeutet dies: zu jedem Pfeil von p_u nach p_v gibt es einen entgegen gerichteten Pfeil von p_v nach p_u.
In solch einer Situation zeichnet man aus Lesbarkeitsgründen oft nur eine Linie und versieht diese entweder mit zwei Pfeilspitzen oder mit gar keiner.

$\rightsquigarrow$ Schlichte Graphen mit symmetrischer Kantenrelation kann man ganz ohne Pfeile darstellen; sie heißen daher auch *ungerichtete Graphen*.

Ungerichtete Graphen—Übliche Definition

Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $G = (V, E)$ mit zwei Bestandteilen:

- einer Menge V von *Knoten* oder *Punkten* (vertices, nodes),
- einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ von *Kanten* (edges)

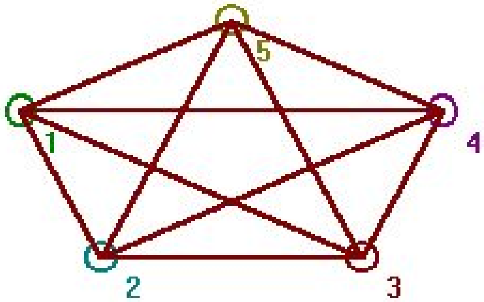
Hinweis: geordnete versus ungeordnete Paare

Hinweis: Manchmal werden auch Schlingen zugelassen, d.h.: $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.

Satz: Die Definitionen auf dieser und der vorigen Folie liefern “dasselbe”.

Beweis: ???

Hinweis: K_n oft Notation für *ungerichteten vollständigen Graphen*.



Mehr schöne Darstellungen von Graphen und Graphtheorie im Petersen-Projekt.

Bipartite Graphen

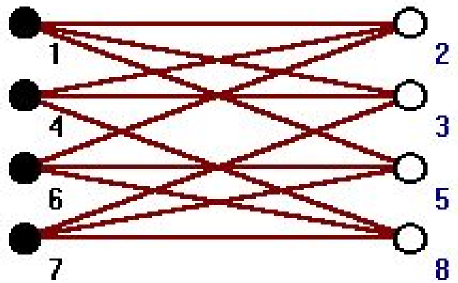
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, *paar* oder *zweifärbbar* gdw. V in zwei fremde komplementäre Mengen V_1 und V_2 zerfällt, sodass E weder Kanten von V_1 nach V_1 noch Kanten von V_2 nach V_2 enthält.

Satz: Jeder gerichtete Graph (und damit jede Relation) lässt sich als paarer ungerichteter Graph darstellen.

Beweis:

Bipartite Graphen

Der “Würfelgraph” ist paar:



Graphische Darstellung von Relationen

(1) Interpretiere Relation als Kantenrelation eines Graphen

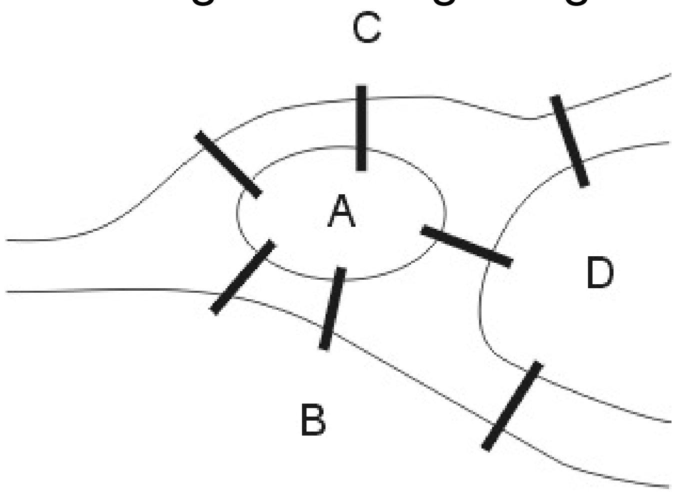
(2) “Bipartite Interpretation” (auch für $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $M_1 \neq M_2$)

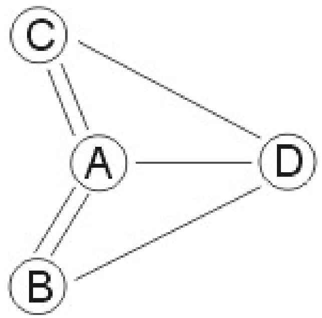
[(3) (manchmal) Hasse-Diagramme]

Multigraphen

Manchmal wollen wir bei Graphen nicht nur Schlingen, sondern auch *Mehrfach-kanten* zulassen.

Beispiel: Modellierung der Königsberger Brücken:





Achtung: Kanten jetzt nicht mehr als Menge / Relation modellierbar !

Relationen aus Graphen: Es gibt verschiedene Möglchkeiten, Relationen zu einem gegebenen Graphen zu definieren.

Die *Kantenrelation* heißt manchmal auch *Adjazenzrelation* oder(insbesondere bei ungerichteten Graphen) *Nachbarschaftsrelation*. Ist $\{u, v\}$ eine Kante in einem ungerichteten Graphen, so heißt u auch *Nachbar* von v (und umgekehrt).
$N(v) = \{u \mid u$ ist Nachbar von $v\}$ heißt auch *(offene) Nachbarschaft* von v;
$N[v] = N(v) \cup \{v\}$ heißt *abgeschlossene Nachbarschaft* von v.

Ist e eine Kante in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und gilt $v \in e$ für einen Knoten v, so heißt v auch *inzident* zu e. Dies definiert die *Inzidenzrelation* $I \subseteq V \times E$.
Mit einer Inzidenzrelation kann man auch Multigraphen beschreiben.
voriger Satz $\rightsquigarrow$ Umgekehrt lässt sich eine Inzidenzrelation (und damit ein Multigraph) als paarer Graph lesen.

Knotengrad

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und v ein Knoten von G.
Der *Ausgangsgrad* oder kurz *Ausgrad* von v ist die Zahl der Bögen, die v als Anfangsknoten besitzen; Schreibweise: $\delta^+(v)$.
Der *Eingangsgrad* oder kurz *Ingrad* von v ist die Zahl der Bögen, die v als Endknoten besitzen; Schreibweise: $\delta^-(v)$.
Der *Grad* von v ist $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.
Ein Knoten vom Grad null heißt auch *isoliert*.
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und v ein Knoten von G.
Der *Grad* von v ist die Zahl der Kanten, zu denen v inzident ist;
Schreibweise: $\delta(v)$.

Operationen auf Graphen

Da ein Graph G durch zwei Mengen V und E spezifiert ist, lassen sich *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplement* leicht “komponentenweise” für Graphen definieren, z.B.: $(V_1, E_1) \cup (V_2, E_2) = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Differenzschreibweise zum *Entfernen einzelner Knoten oder Kanten* aus vorliegendem Graphen $G = (V, E)$:
Ist $v \in V$, so ist $G - v = (V \setminus \{v\}, E \cap (V \setminus \{v\} \times V \setminus \{v\}))$.
Ist $e \in E$, so ist $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Knotengrad—Wichtige Aussagen

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit m Kanten. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = m.$$

Beweis: durch vollständige Induktion über die Kantenzahl m.

Für $m = 0$ besteht der Graph offenbar nur aus isolierten Knoten. ✓

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Graphen mit höchstens q Kanten.

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$ mit $m = q + 1$ Kanten. Sei $e \in E$ beliebig. Auf $G - e$ ist die IV anwendbar. Durch das Entfernen eines Bogens haben sich aber sowohl die Summe der Eingangsgrade, als auch die Summe der Ausgangsgrade und die Anzahl der Kanten um genau Eins verringert, sodass aus der IV unmittelbar die Induktionsbehauptung folgt.

Knotengrad—Wichtige Aussagen

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit m Kanten. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m.$$

Beweis: analog

Folgerung: In einem ungerichteten Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Pfade und Wege

Ein *Pfad der Länge* n, $n \in \mathbb{N}$, in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge von $n + 1$ Knoten $p = v_0, v_1, \ldots, v_n$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i < n$.
p heißt auch *Pfad von* v_0 *nach* v_n.
Alternativ können wir die Menge der Pfade der Länge n rekursiv beschreiben:
(a) Ein einzelner Knoten x heißt auch Pfad der Länge null (von x nach x).
(b) Ist p ein Pfad der Länge $n \geq 0$ von x nach y und (y, z) ein Bogen, so ist p, v ein Pfad der Länge $n + 1$ von x nach z.

Bei ungerichteten Graphen sprechen wir hingegen von *Wegen der Länge* n.
Gilt $v_0 = v_n$, so spricht man auch von einem (gerichteten) *Kreis* der Länge n.
Ein Pfad / Weg / Kreis $p = v_0, v_1, \ldots, v_n$ heißt *einfach*, falls die Knoten $v_0, \ldots,$ v_n alle paarweise verschieden sind mit der einzig möglichen Ausnahme $v_0 = v_n$.
Beispiel: siehe Tafel

Pfade und das Relationenprodukt

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Es gibt einen Pfad der Länge n von u nach v in G gdw. $(u, v) \in E^n$.

<u>Beweis:</u> durch vollständige Induktion:

Die Aussage ist richtig für $n = 0$ (und auch für $n = 1$). ✓

Wir nehmen an, die Aussage sei richtig für $x \leq n$.

Betrachte einen Pfad der Länge $n + 1$. Gemäß der rekursiven Definition (!) gibt es einen Pfad p der Länge n von u nach w und einen Bogen (w, v).

IV $\leadsto (u, w) \in E^n \land (w, v) \in E^1$. $\leadsto (u, v) \in E^n \circ E^1 = E^{n+1}$.

Die Rückrichtung sieht man ebenso.

Folgerung: Es gibt einen Pfad von u nach v in G gdw. $(u, v) \in E^+$.

Der Algorithmus von Warshall (Floyd 62 / Kleene 56 / Warshall 62 / Roy 59)

Es sei R eine Relation über M, und M enthalte die Elemente $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Schubfachprinzip $\rightsquigarrow$ Lemma: $R^n \subseteq (R \cup \Delta_M)^{n-1}$. $\rightsquigarrow$ $R^* = (R \cup \Delta_M)^{n-1}$.

$(x_i, x_j) \in R_k \iff \exists$ Pfad von x_i nach x_j unter ausschließlicher Benutzung von Zwischenknoten aus $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Lemma: $R_n = R^*$.

Lemma: $R_0 = R \cup \Delta_M$. Für $k > 0$ gilt:
$(x_i, x_j) \in R_k$ gdw. $((x_i, x_j) \in R_{k-1}) \vee (\{(x_i, x_k), (x_k, x_j)\} \subseteq R_{k-1})$.

Der Algorithmus von Warshall (Floyd 62 / Kleene 56 / Warshall 62 / Roy 59)

Überführung in "kubischen Algorithmus"; dabei sei R als Boolesches $n \times n$-Array abgespeichert (quasi als Relationenmatrix mit Grenzen $1 \dots n$) und S enthalte die Lösung:

$S := R \cup \Delta_M$;
Für k **von** 1 **bis** n:
  Für i **von** 1 **bis** n:
    Für j **von** 1 **bis** n:
      $S(i,j) := S(i,j) \vee (S(i,k) \wedge S(k,j))$

Korrektheit folgt aus Schleifeninvariante $R_{k-1} \subseteq S \subseteq R^*$ für äußere Schleife sowie vorigen Lemmata.
Achtung: Bei Schleifeneintritt ist $R_{k-1} \subset S$ möglich (in-place) !
Technik bekannt als *dynamisches Programmieren*.

Der Algorithmus von Warshall (Floyd 62 / Kleene 56 / Warshall 62 / Roy 59)

eine in der Praxis schnellere Alternative:

$S := R \cup \Delta_M$;
Für k **von** 1 **bis** n:
    Für i **von** 1 **bis** n:
        Wenn $S(i,k)$ **dann**
            Für j **von** 1 **bis** n:
                $S(i,j) := S(i,j) \vee S(k,j)$

Frage: Was hat das mit Relationenmatrizen zu tun ?

Kurzer Exkurs: Robert W Floyd 1936-2001 

Highschoolabschluss mit 14, erster Bachelorabschluss mit 17

Floyd hat nie promoviert, ist aber einer der Pioniere der Algorithmik.

Auf ihn gehen z.B. Korrektheitsbeweise von Programmen (Schleifeninvarianten) zurück.

Mit 27 wird Floyd außerordentlicher Professor an der Carnegie Mellon Universität.
Mit 32 wird er ordentlicher Professor in Stanford.
Dort rege Zusammenarbeit mit Donald Knuth.