Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

Äquivalenzrelationen

Eine *Äquivalenzrelation* ist eine binäre Relation über M, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel: Allrelation und Diagonale sind Äquivalenzrelationen.

Beispiel: $R = \{(a, b), (b, a)\} \cup \Delta_{\{a,b,c,d\}}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel: Betrachte das Warenangebot eines Supermarktes. Die Preisgleichheit liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der angebotenen Waren.

Beispiel: $R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : m \mid (a - b)\}$. Eigenschaften nachrechnen!
Schreibweise: $a \equiv b \mod m$ statt aR_mb.

Partitionen

Es sei M eine Menge, $M \neq \emptyset$. Eine *Zerlegung*, *Klasseneinteilung* oder *Partition* von M ist eine *Mengenfamilie* $Z \subseteq 2^M$ mit:

1. $M = \bigcup_{A \in Z} A$.

2. $\emptyset \notin Z$.

3. $\forall A, B \in Z : A \cap B \neq \emptyset \implies A = B$.

Die Elemente von Z heißen auch *Klassen*.

Partitionen und Äquivalenzrelationen

Lemma: Eine Klasseneinteilung Z von M induziert eine Äquivalenzrelation $\sim_Z$ über M durch $a \sim_Z b \iff a$ und b liegen in derselben Z-Klasse.

Lemma: Ist R eine Äquivalenzrelation über M, so ist

$$Z_R = \left\{ \underbrace{\{a \in M \mid aRb\}}_{=:[b]_R} \mid b \in M \right\}$$

eine Zerlegung von M, die so genannte *Quotientenmenge*, oft geschrieben M/R. b heißt auch *Repräsentant* der *Äquivalenzklasse* $[b]_R$.

Genauer gilt: Lemma: Ist R ÄR, so gilt $R = (\sim_{Z_R})$.

Partitionen und Äquivalenzrelationen: Beispiele

Beispiel: Allrelation: $[x]_{M\times M} = M$ für alle $x \in M$.

Beispiel: Diagonale: $[x]_{\Delta_M} = \{x\}$ für alle $x \in M$.

Beispiel: $R_m \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: Äquivalenzklassen sind $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

Hinweis: Zwei ganze Zahlen sind äquivalent gdw. sie lassen beim Teilen durch m denselben Rest. Schreibweise: $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/R_m$.

Partitionen und Äquivalenzrelationen: $\mathbb{Q}$ als Beispiel

Wir hatten bislang verschiedentlich $\mathbb{N}$ *axiomatisch* eingeführt.
Daraus könnte man $\mathbb{Z}$ einführen als Quotientenmenge auf $\{+,-\} \times \mathbb{N}$ mit der Äquivalenzrelation $(v,n) \sim (v',n')$ gdw. $n = n' \wedge (v = v' \vee n = 0)$.

Über $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiere: $(a,b) \sim (a',b') \iff ab' = ba'$. Dann ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert als $\mathbb{Q} = M/\sim$.
Statt $[(a,b)] \in M/\sim$ schreiben wir auch $\frac{a}{b}$.
(a,b) und (a',b') liegen in derselben Äquivalenzklasse gdw. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ gdw. $ab' = ba'$.

Weiter Sätze und Begriffe

Satz: Sind R und S ÄR über M, so auch $R \cap S$.

Beweis: an der Tafel

Satz: Es seien R und S ÄR über M. $R \circ S$ und $S \circ R$ ist ÄR gdw. $R \circ S$ ist ÄR gdw. es gilt $R \circ S = S \circ R$.

Beweis: an der Tafel

Die *Äquivalenzhülle* von einer binären Relation R heißt auch *von R induzierte Äquivalenzrelation*, geschrieben R_E^*.

Induzierte Äquivalenzrelation—ein Beispiel

Sei $M = \{a, b, c, e, d, f\}$ und
$R = \{(a, b), (c, b), (d, e), (e, f)\}$.
Konstruiere Äquivalenzhülle R_E^* von R.
R_E^* ist symmetrisch $\rightsquigarrow \Delta_M \subseteq R_E^*$.
R_E^* ist reflexiv $\rightsquigarrow R^- \subseteq R_E^*$.
Transitivität liefert vier weitere Paare (welche ?)
Die Äquivalenzklassen von R_E^* sind:
$[a] = \{a, b, c\}$ und $[d] = \{d, e, f\}$.

Graphentheoretische Interpretation: R ist Kantenrelation; die induzierten Äquivalenklassen sind die *schwachen Zusammenhangskomponenten*. (siehe Tafelbild)

Induzierte Äquivalenzrelationen—ein Satz

Satz: Für $R \subseteq M \times M$ gilt:

$$R_E^* = \underbrace{(R \cup R^- \cup \Delta_M)^+}_{=:S} = \underbrace{(R \cup R^-)^+ \cup \Delta_M}_{=:T}.$$

In Worten:

R_E^* ist die reflexive Hülle der transitiven Hülle der symmetrischen Hülle von R.

Graphentheoretische Interpretation: xR_E^*y gdw. es gibt in dem ungerichteten Graphen mit Knotenmenge M und Kantenmenge $R \cup R^-$ einen Weg von x nach y (evtl. der Länge null). $\rightsquigarrow$ Begriff des *schwachen Zusammenhangs*.

Induzierte Äquivalenzrelationen—ein Satz

Satz: Für $R \subseteq M \times M$ gilt:

$$R_E^* = \underbrace{(R \cup R^- \cup \Delta_M)^+}_{=:S} = \underbrace{(R \cup R^-)^+ \cup \Delta_M}_{=:T}.$$

Beweis: Wegen $\Delta_M \cup R^- \subseteq S \cap T$ sind S und T reflexiv und symmetrisch; S und T sind per def. transitiv. $\rightsquigarrow$ S und T sind ÄR, d.h., $R \subseteq R_E^* \subseteq T \subseteq S$.

Angenommen, es gäbe $(x, y) \in S$, $(x, y) \notin R_E^*$.

Wohlordnungsaxiom $\rightsquigarrow$ es gibt minimales n mit der Eigenschaft, dass es irgendwelche $(s, u) \in (R \cup R^- \cup \Delta_M)^n$ gibt mit $(s, u) \notin R_E^*$.

Klar: $n > 1$, denn $R_E^* \supseteq (R \cup R^- \cup \Delta_M) = (R \cup R^- \cup \Delta_M)^1$

$\rightsquigarrow \exists t (s, t) \in (R \cup R^- \cup \Delta_M)^{n-1} \wedge (t, u) \in (R \cup R^- \cup \Delta_M)$

n minimal $\rightsquigarrow (s, t) \in R_E^*$; “klar”: $(t, u) \in R_E^*$; also: $(s, u) \in R_E^*$, da R_E^* transitiv.

Hinweis: Alternative: Induktionsbeweis

Starker Zusammenhang

Satz: Für $R \subseteq M \times M$ gilt: $R' := R^* \cap (R^-)^*$ ist eine ÄR.

Graphentheoretische Interpretation: $xR'y$ gdw. es gibt in dem gerichteten Graphen mit Knotenmenge M und Kantenmenge R einen Pfad von x nach y (evtl. der Länge null) und es gibt in dem gerichteten Graphen mit Knotenmenge M und Kantenmenge R^- einen Pfad von x nach y (evtl. der Länge null). .

$\leadsto$ Begriff des *starken Zusammenhangs*.

Die Äquivalenzklassen sind die *starken Zusammenhangskomponenten*.

Ein Graph heißt *stark bzw. schwach zusammenhängend* gdw er besitzt nur eine starke bzw. schwache Zusammenhangskomponente.

Für ungerichtete Graphen fallen die beiden Zusammenhangsbegriffe zusammen; man spricht dort daher einfach vom *Zusammenhang*.

Noch zwei Beispiele

Beispiel: Es sei M die Menge aller Menschen.
R sei gegeben durch: xRy gdw. x ist Elternteil von y.
Was <u>bedeutet</u> xR_E^*y (in Worten) ?
<u>Beschreibe</u> R' (wie soeben definiert).

Beispiel: Vor einigen Vorlesungen hatten wir die wohlgeformten aussagenlogischen Ausdrücke eingeführt. Ist der dort eingeführte Äquivalenzbegriff eine ÄR auf der Menge der w.a.A.?

noch etwas Graphentheorie

Bäume kann man rekursiv wie folgt definieren:

- $T = (V, \emptyset)$ ist ein Baum, falls V nur einen Knoten enthält.
- Sind $T_1 = (V_1, E_1)$ und $T_2 = (V_2, E_2)$ Bäume mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, so wähle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ beliebig; dann ist $T = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{v_1, v_2\})$ ein Baum.
- Nichts anderes sind Bäume.

noch etwas Graphentheorie

Satz: Ein ungerichteter schlichter Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 1$ Knoten und m Kanten heißt *Baum* gdw. eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutreffen:

1. Zwischen je zwei Knoten gibt es genau einen einfachen Weg.
2. G ist zusammenhängend, und es gilt $n - 1 = m$.
3. G ist zusammenhängend, aber $G - e$ ist nicht zusammenhängend für beliebige $e \in E$.
4. G enthält keinen Kreis (ist *azyklisch*, *kreisfrei* oder *Wald*), aber durch Hinzufügen irgendeiner Kante (genauer: einer Zweiermenge aus V), die nicht in E liegt, entsteht ein Kreis.

Veranschaulichung der Zusammenhänge

Big Bad Joe hat im Staate Kalifornien (CA) mal wieder einen Coup gelandet. Jetzt muss er sich nach Pennsylvania (PA) zu seinen Freunden in Sicherheit bringen. . .