Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

Quasiordnung

Eine reflexive und transitive Relation R über M heißt auch *Quasiordnung*.

Beispiel: Jede Äquivalenzrelation ist eine Quasiordnung.
Genauer gilt: Eine Quasiordnung ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie symmetrisch ist.

Beispiel: Betrachte über der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen die Relation $y \prec z \iff |y| \le |z|$.
Beobachte: $\prec$ ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch.

Satz: Ist R eine Relation über M, so ist R^* die kleinste R umfassende Quasiordnung.

Halbordnungen

Eine antisymmetrische Quasiordnung R über M heißt auch *Halbordnung* (auf der gegebenen Grundmenge). Gilt xRy, so heißt x auch *Vorgänger* von y und y *Nachfolger* von x.

Beispiel: $\leq$ oder $\geq$ auf $\mathbb{R}$ sind Halbordnungen.

Beispiel: $\prec$ auf $\mathbb{C}$ ist keine Halbordnung.

Beispiel: Die Teilerrelation ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber nicht auf $\mathbb{Z}$.

Beispiel: Auf der Potenzmenge von M ist $\subseteq$ oder auch $\supseteq$ eine Halbordnung.

Lineare Ordnungen

Eine Halbordnung $\leq$ auf M heißt *linear* (*total*) gdw. $\forall x, y \in M(x \leq y \vee y \leq x)$.

Zwei Elemente $x, y \in M$ heißen *vergleichbar* gdw. $(x \leq y \vee y \leq x)$; andernfalls heißen sie *unvergleichbar*. Die HO $\leq$ ist also linear gdw. alle Elemente von M untereinander paarweise vergleichbar sind.

Satz: Ist Vergleichbarkeit transitiv, so ist sie eine Äquivalenzrelation.
Dann gilt: Eine HO ist linear gdw. die von ihr induzierte Vergleichbarkeitsrelation hat nur eine Äquivalenzklasse.

Beispiel: Lexikalische Ordnung in einem Wörterbuch

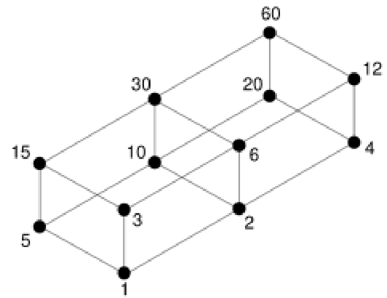
Lineare Ordnungen sind eminent wichtig für unser Leben (als Informatiker)

Bezeichnungen für “Computer”: ordinateur / ordenador

“Ordnen” (Sortieren) ist die “Rechnertätigkeit”, die am meisten Rechenzeit weltweit benötigt.

Für manche “gutartige” Sortierverfahren ist es entscheidend für ihre Laufzeit, wie “wenig linear” die Eingangsreihenfolge ist.

Halbordungsrelationen: ein Beispiel zum Hasse-Diagramm



Bei diesem *Hasse-Diagramm* werden “passende” unvergleichbare Elemente auf einer Ebene dargestellt.

Überführung in “normale” Graphendarstellung einer Relation durch:
(a) Einfügen von Pfeilspitzen (nach oben),
(b) Einfügen von Schlingen (Reflexivität),
(c) Einfügen weiterer Bögen (Transitivität)

echte und unmittelbare Nachfolger / Hasse-Diagramme

Es sei $\leq$ eine Halbordnung auf M. $z \in M$ heißt *unmittelbarer Nachfolger* von $x \in M$, falls (1) $x \leq z$, (2) $x \neq z$ und (3) falls aus $x \leq y \leq z$ $y = x$ oder $y = z$ folgt. Gelten nur (1) und (2), so heißt z *echter Nachfolger* von x, i.Z. $x < z$.

Hinweis: Im Hasse-Diagramm werden genau die Kanten dargestellt, die zur Relation "unmittelbarer Nachfolger" gehören.

Hinweis: Entsprechend definierbar: *echter Vorgänger*, *unmittelbarer Vorgänger*

Satz: Ist R die zu der Halbordnung $\leq$ auf M gehörige Relation des echten Nachfolgers, so ist $\leq$ gerade die reflexive Hülle von R.

Satz: Ist R die zu der Halbordnung $\leq$ auf M gehörige Relation des unmittelbaren Nachfolgers und ist M endlich, so ist $\leq$ gerade die reflexive transitive Hülle von R.

Beispiel: Teilmengenhalbordnung von $\{a, b, c\}$.

Restriktionen

Ist R eine Relation über M und ist $N \subseteq M$, so heißt $\leq_N := (\leq \cap N \times N)$ *Restriktion* von R auf N.

Satz: Mit $\leq$ ist auch $\leq_N$ Quasiordnung bzw. Halbordnung bzw. lineare Ordnung.

Daher steckt ein Prinzip: Über Allaussagen definierte Eigenschaften übertragen sich durch Restriktion.

In einer Halbordnung $(M, \leq)$ heißt $K \subseteq M$ *Kette* gdw. die Restriktion von $\leq$ auf K eine lineare Ordnung ist.
Eine Kette K heißt *maximal*, wenn es keine K umfassende Kette gibt.

Maximalkettenprinzip von Hausdorff / Birkhoff:
In jeder halbgeordneten Menge gibt es maximale Ketten.

Sortieren—formal

Es sei $(M, \leq)$ eine totale Ordnung (z.B.: lexikalische Ordnung oder gewöhnliche Anordnung der ganzen Zahlen) und $N \subseteq M$ eine endliche Menge mit totaler Ordnung R (z.B.: (reflexive Hülle der) Anordnung im Speicher). N heißt *sortiert* bzgl.$\leq$ gdw. $R = \leq_N$.

$\rightsquigarrow$ einfacher Sortieralgorithmus:

Solange $\exists x, y \in N, x \neq y : xRy \wedge y \leq x$: $R := (R \setminus \{(x, y)\}) \cup \{(y, x)\}$.

$\rightsquigarrow$ Iterative Variante: *Blasensortieren* (Bubblesort)
Es werden immer nur Nachbarn (bgzl. R) verglichen.

Programmtexte als Formalismen—ein Weg zur Informatik

```
procedure BS(A)
  for each i from 1 to length(A) do:
       for each j from length(A) downto i + 1 do:
         if A[ j ] < A[ j-1 ] then
           swap( A[ j ], A[ j-1 ] )
         end if
       end for
  end for
end procedure
```

Ein Beispiel:

```
7 5 3 8
7 5 3 8
7 3 5 8
3 7 5 8
3 7 5 8
3 5 7 8
```

Ist Sortieren wichtig ?

Ist die vorgeschlagene Prozedur richtig ?

Wie sieht man das ein ?

Programmtexte als Formalismen—ein Weg zur Informatik

```
procedure BS(A)
//Die Eingabe A ist eine Liste zu sortierender Gegenstände
  for each i from 1 to length(A) do:
       for each j from length(A) downto i + 1 do:
         if A[ j ] < A[ j-1 ] then
           swap( A[ j ], A[ j-1 ] )
         end if
//A[j-1] ist ein kleinstes Element von A[j-1],...,A[length(A)]
       end for
//A[i] ist ein kleinstes Element von A[i],...,A[length(A)]
//Die Liste A[1],..,A[i] ist aufsteigend sortiert
  end for
end procedure
```

Programmtexte als Formalismen—ein Weg zur Informatik

```
procedure BS(A)
//Die Eingabe A ist eine Liste von n zu sortierenden Gegenständen
  for each i from 1 to n do:
       for each j from n downto i + 1 do:
         if A[ j ] < A[ j-1 ] then
           swap( A[ j ], A[ j-1 ] )
         end if
       end for
//swap wird höchstens n−i mal ausgeführt
  end for
//(Die äußere Schleife wird n mal ausgeführt.)
//Also wird swap insgesamt höchstens (n−1)+(n−2)+···+1 = n(n−1)/2 mal ausgeführt
end procedure
```

Aufgabe: Welche Teile müssten Sie noch beweisen ?!

klein und groß...

Es sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung und $\emptyset \neq N \subseteq M$.
$x \in N$ heißt *größtes Element* von N, wenn $\forall y \in N : y \leq x$.
$x \in N$ heißt *kleinstes Element* von N, wenn $\forall y \in N : x \leq y$.
$x \in N$ heißt *maximales Element* in N, wenn $\forall y \in N : x \leq y \implies y = x$.
$x \in N$ heißt *minimales Element* in N, wenn $\forall y \in N : y \leq x \implies y = x$.
$x \in M$ heißt *obere Schranke* von N, wenn $\forall y \in N : y \leq x$.
$x \in M$ heißt *untere Schranke* von N, wenn $\forall y \in N : x \leq y$.
Eine kleinste obere Schranke heißt auch *obere Grenze* oder *Supremum*.
Eine größte untere Schranke heißt auch *untere Grenze* oder *Infimum*.

Satz: Eine Menge N besitzt ein größtes Element
gdw. eine obere Grenze liegt in N
gdw. eine obere Schranke liegt in N.
Größte Elemente und obere Schranken einer Menge sind eindeutig bestimmt.

Beispiel: Teilmengenhalbordnung von $\{a, b, c\}$.
Beispiel: $0 \prec 2 \prec 4 \prec \cdots \prec 1 \prec 3 \prec 5 \prec \cdots$ auf $\mathbb{N}$.

oh wie wohl...

Eine *Wohlordnung* auf einer Menge M ist eine totale Ordnung mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge von M ein bzgl. dieser Ordnung kleinstes Element hat. Die Menge M zusammen mit der Wohlordnung heißt eine wohlgeordnete Menge.

Beispiel: Die $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Wohlordnung, aber weder die gewöhnliche Anordnung der ganzen Zahlen noch die der positiven reellen Zahlen ist eine Wohlordnung.

Für die Algorithmik wichtig: noch allgemeinerer Begriff der *Wohlquasiordnung*.

Wohlordnungssatz / Wohlordnungsprinzip: Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
Hinweis: Äquivalent zum Maximalkettenprinzip und zum Auswahlaxiom.

Transfinite Induktion verallgemeinert die uns bekannte Induktion auf beliebige wohlgeordnete Mengen: Sei $(M, \leq)$ eine Wohlordnung und 0 bezeichne das kleinstes Element. Will man beweisen, dass die Eigenschaft P für alle Elemente von M zutrifft, dann beweist man bei transfiniter Induktion folgendes:
– $P(0)$ ist wahr.
– Wenn $0 \leq a$, $a \neq 0$ und $P(b)$ ist wahr ist für alle $b \leq a$, $b \neq a$, dann ist auch $P(a)$ wahr.

Wohlordnungsprinzip $\rightsquigarrow$ Induktion ist potentiell immer anwendbar.

Definitionen mit transfiniter Rekursion erstmals von J. von Neumann (1928).

Ein informatisches Inklusionsdiagramm: Der Komplexitätszoo