Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Spezielle Relationen

- Äquivalenzrelationen
- Halbordnungen
- Funktionen

$\boxed{\textbf{Folgen}}$ sind spezielle Funktionen

Erinnerung: $\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen; $[n] := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Eine *unendliche Folge* f mit *Gliedern* aus einer Menge M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$.

Eine *endliche Folge* f mit *Gliedern* aus einer Menge M ist eine Abbildung $f : [n] \to M$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Folgen dienen zum *Auflisten*, *Abzählen* oder *Nummerieren* von (einigen) Elementen einer Menge. Eine surjektive Folge liefert also eine *vollständige Auflistung* des Wertebereichs.

Folgen: Beispiele

Beispiel: *Listenschreibweise*:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^m}, \ldots\right)$$

beschreibt die Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ i \mapsto 2^{-i}$.

Beispiel: Die ganzen Zahlen lassen sich vollständig auflisten. Betrachte

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Cantorsche Abzählungsschema I

Satz: Es gibt eine vollständige Auflistung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis: Betrachte das folgende Schema:

```
/ 0 1 2 3 4 5 ...
0 0 2 5 9 14 20 ...
1 1 4 8 13 19 26 ...
2 3 7 12 18 25 33 ...
3 6 11 17 24 32 41 ...
4 10 16 23 31 40 50 ...
5 15 22 30 39 49 60 ...
| | | | | | | ...
```

Das Cantorsche Abzählungsschema I

Das Schema lässt sich auch formal notieren als *Cantorsche Paarfunktion*:

$$\langle i, j\rangle = (i + j)(i + j + 1)/2 + j$$

Also:
$\langle 0, 0\rangle = 0$, $\langle 1, 0\rangle = 1$, $\langle 0, 1\rangle = 2$, $\langle 2, 0\rangle = 3$, $\ldots$

Folgerung: Für jedes n ist $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n \text{ mal}}$ vollständig auflistbar.

Beispiel: $n = 3$ (Tripel): $\langle i, j, k\rangle = \langle\langle i, j\rangle , k\rangle$.

Das Cantorsche Abzählungsschema II

Satz: Die rationalen Zahlen lassen sich vollständig auflisten.

Beweis: Dies lässt sich zeigen, indem man die Brüche folgendermaßen in einem zweidimensionalen Schema anordnet und dann den vorigen Satz anwendet:

```
1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 ...
2/1 2/2 2/3 2/4 2/5 ...
3/1 3/2 3/3 3/4 3/5 ...
4/1 4/2 4/3 ...
5/1 5/2 ...
...
```

Erinnerung: Äquivalenzklassendefinition der rationalen Zahlen

Rekursiv definierte Folgen

Beispiel: Die Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gegeben durch:

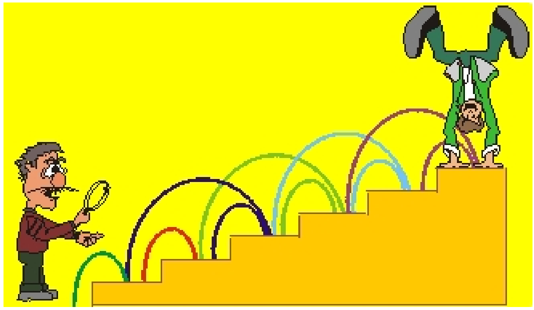
$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} \cdot n, \text{ für } n > 0. \end{aligned}$$

Schreibweise: $\prod_{j \in [n]} b_j$ bezeichnet das Produkt aller Zahlen der endlichen Folge $(b_0, \ldots, b_{n-1})$. Das leere Produkt wird als Eins interpretiert.

Satz: Für die oben definierte Folge a_n gilt: $a_n = \prod_{j \in [n] \setminus \{0\}} j$. $f(n) = a_n$ heißt auch *Fakultätsfunktion*; Schreibweise: $n!$

Beweis: eine leicht Induktion

Rekursiv definierte Folgen: Treppensteigen



Bei jeder Stufe kann man sich die Frage stellen:

Nehme ich eine Stufe oder überspringe ich eine Stufe?

Die erste Stufe muß auf jeden Fall betreten werden.

Frage: Auf wieviel verschiedene Arten f_n kann man nun eine n-stufige Treppe heraufgehen?

Versuchen wir (an der Tafel), eine Tabelle dafür aufzustellen.

Rekursiv definierte Folgen: Treppensteigen

Finden wir ein *Bildungsgesetz* ?

Für $n \geq 2$ gibt es zwei Möglichkeiten, eine n-stufige Treppe zu erklimmen:
– entweder hatten wir einen Schritt von einer $(n-1)$-stufigen Treppe aus gemacht
– oder zwei Stufen auf einmal von einer $(n-2)$-stufigen Treppe aus genommen.

$\rightsquigarrow f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; Sonderfälle: $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

Diese Folge kommt sehr häufig in der Natur und Kultur vor und wird gemeinhin die Folge der *Fibonacci-Zahlen* genannt !
Mehr über Leonardo Fibonacci bei einem virtuellen Museumsbesuch.

Der Goldene Schnitt

ist die Teilung einer Strecke so, dass die gesamte Strecke X sich zu dem größerem Teilstück der Länge 1 verhält wie das größere Teilstück zum kleineren.

Das Teilverhältnis lässt sich nun einfach ausrechnen. Es gilt:

$$X : 1 = 1 : (X - 1), \quad \text{also:} \quad X^2 - X = 1$$

mit den beiden Lösungen ϕ und $\hat{\phi} = 1 - \phi$, wobei

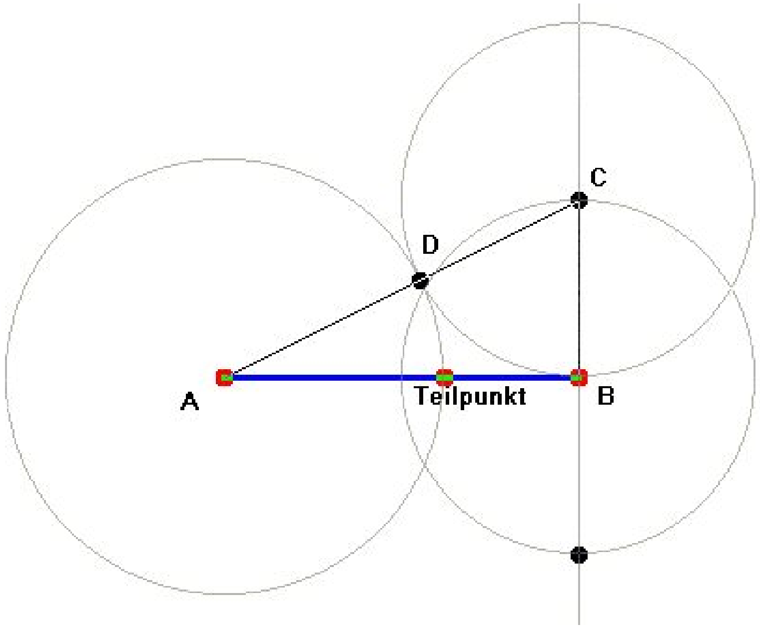
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6181\ldots$$

die *goldene Schnittzahl* ist.

Ein architektonischer Exkurs

Beim Parthenontempel in Athen bildet der Säuleneingang hierbei ein goldenes Rechteck, also ein Rechteck, dessen Seiten sich genau wie der goldene Schnitt verhalten. Auch verhält sich die Höhe bis zum Dach zur Höhe der Säulen wie der goldene Schnitt.

Konstruktion des Goldenen Schnitts



Im Endpunkt der Strecke AB wird die Senkrechte errichtet. Auf ihr trägt man die Hälfte von AB ab. Es ergibt sich Punkt C. Der Kreis um C mit dem Radius CB schneidet AC bei D. Überträgt man den Abstand AD auf die Strecke AB, so ergibt sich der Teilpunkt T. T teilt AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Fibonacci-Zahlen: Eine Philatelistische Annäherung

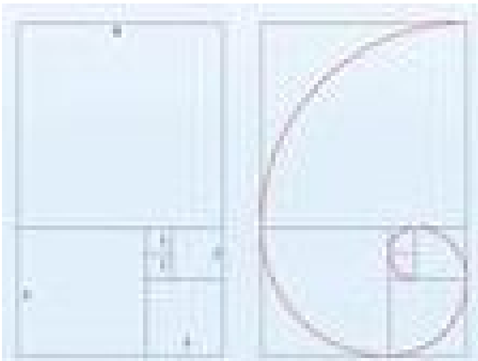
Diese Schweizer Briefmarke wurde zum 150-jährigen Bestehen des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins SIA herausgegeben und enthält eine interessante mathematische Konstruktion.

Die Briefmarke zeigt den Zusammenhang des Goldenen Schnitts mit der Logarithmischen Spirale, auch Fibonacci-Spirale genannnt.

Nähere Erläuterungen finden Sie hier

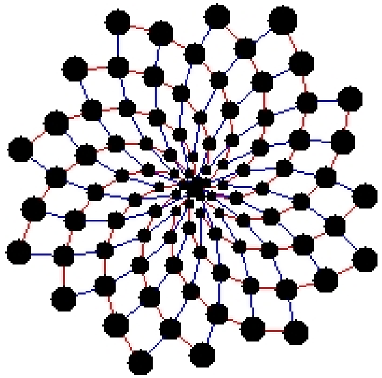
Ein **geometrisches Problem**, das zu den Fibonacci-Zahlen führt:
Konstruktion aneinanderliegender Quadrate.

Wird in jedem Quadrat ein Viertel eines Kreises gezogen wie in der Abbildung, erhält man die sogenannte *Fibonacci-Spirale*, eine Form, die bei gewissen Muscheln beobachtet werden kann.



Die Muscheln sind lediglich ein Beispiel für ein verbreitetes Phänomen: das **Vorkommen der Fibonacci-Zahlen in der Natur**.

Die Fibonacci-Zahlen finden sich in der Position der Blätter und der Blumenblätter von Blumen, in den Verzweigungen einiger Pflanzen, in der Anordnung der Samen der Sonnenblumen oder der Schuppen der Tannzapfen.
Letztere sind so angeordnet, dass sie zwei Serien von entgegengesetzten Spiralen bilden, die im Zentrum zusammenfließen.
Im selben Tannzapfen oder derselben Sonnenblume sind die Zahlen der Spiralen, die sich in beide Richtungen winden, aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

Konkretes Naturbeispiel: Die Sonnenblume

Bei der Sonnenblume sind die Samen bogenförmig angeordnet. Das heißt, wenn man die Anzahl der Bögen gegen den Uhrzeigersinn und die der Bögen im Uhrzeigersinn betrachtet, erhält man zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

Begründung: Die Sonnenblumenkerne wachsen kreisförmig um den Mittelpunkt der Sonnenblume. Zwei in ihrer Entwicklung aufeinander folgende Kerne teilen den Umfang dabei im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Der Winkel zwischen ihnen beträgt also $360^o - 360^o/\phi \approx 137,518\ldots^o$.

Mehr finden Sie bei matheprisma.

Satz: (Formel von Binet) $f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$.

Beweis: $n = 0$ und $n = 1$ elementar. Für den IS beobachten wir:

$$\phi^2 = 1 + \phi = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \qquad (1-\phi)^2 = 1 + (1-\phi) = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+2} - (1-\phi)^{n+2}}{\sqrt{5}} &= \frac{\phi^n(1+\phi) - (1-\phi)^n(1+(1-\phi))}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n + \phi^{n+1} - (1-\phi)^n - (1-\phi)^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= f_{n+1} + f_n = f_{n+2} \end{aligned}$$

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Goldenem Schnitt und Fibonacci-Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi.$$

Mächtigkeit von Mengen

Was bedeutet der Prozess des Zählens (Nummerierens) allgemein ?!
Für eine endliche Menge M könnte er in der (evtl sukzessiven) Konstruktion einer Bijektion von $[n]$ auf M bestehen. Wir sagen dann auch, M habe n Elemente.

Allgemeiner heißen zwei Mengen A und B *gleichmächtig* gdw es gibt eine Bijektion f von A nach B.
Speziell heißt eine Menge A *abzählbar unendlich*, wenn sie mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.

Satz: Sämtliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind abzählbar.

Abzählbare Mengen

Satz: Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter, endlicher, nichtleerer Mengen.
Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar unendlich.

<u>Beweis:</u> Gesucht: Bijektion ϕ von $\mathbb{N}$ auf $M^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.
Es bezeichne m_n die Zahl der Elemente von M_n und $m_n^+ = \sum_{0\leq j<n} m_j$.
Es gibt also Bijektionen $\phi_n : [m_n] \to M_n$.
Da $\forall n : m_n > 0$, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Zahl $n(k) \in \mathbb{N}$ mit $m_{n(k)}^+ \leq k \leq m_{n(k)+1}^+$.
Da die M_n paarweise disjunkt sind, ist $k \mapsto \phi_{n(k)}(k - m_{n(k)}^+)$ die gesuchte Bijektion ϕ.

Folgerung: Sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge. Die Menge aller endlichen Folgen, gebildet von Elementen aus M, ist abzählbar unendlich.

Überabzählbare Mengen sind Mengen, die nicht abzählbar sind.

Satz: $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

Beweis: (Cantors *Diagonalisierungsargument*; ein spezieller Widerspruchsbeweis)
Andernfalls gäbe es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$.
Betrachte $S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.
Da $S \in 2^{\mathbb{N}}$, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $f(s) = S$.
Wäre $s \in S$, so $s \notin S$ nach Def. von S.
Wäre $s \notin S$, so folgt nach Def. von S: $s \in S$.
Also folgt aus der Annahme der Existenz von f die Kontradiktion:
$s \in S \iff s \notin S$.
Daher ist die Annahme falsch.

Allgemeiner gilt: A und 2^A sind nicht gleichmächtig.

Überabzählbare Mengen: ein weiteres Beispiel

Es bezeichne $M^N := \{f \mid f : N \to M\}$.

Satz: $2^{\mathbb{N}}$ und $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sind gleichmächtig.

Beweis: Zu jeder Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ kann man seine *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definieren durch $\chi_M(x) = 1$ gdw. $x \in M$. Umgekehrt lässt sich jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ als charakteristische Funktion der Menge $M_f = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 1\}$ auffassen.

Eine überraschende Folgerung für die Informatik

Programmtexte (in einer fixierten Programmiersprache) lassen sich (rein syntaktisch) als endliche Folgen über einer endlichen Menge (dem *Alphabet*) begreifen.

Folgerung: Die Menge aller Programmtexte ist abzählbar.

Programmtexte können zur Beschreibung von Funktionen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ verwendet werden.

Folgerung: Nicht jede Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ kann durch einen Programmtext beschrieben werden.

$\leadsto$ “Computer können nicht alles.”

Die **Mächtigkeit einer Menge** M wird auch mit $|M|$ bezeichnet.
Ist M endlich, so ist dies gerade die Anzahl der Elemente; dann schreibt man auch $\#M$.

Wir können somit auch Mengen bzgl. ihrer Mächtigkeit vergleichen.
Lemma: Für ein gegebenes Universum U ist dieses eine Quasiordnung auf den Teilmengen von U.