Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

Diskrete Strukturen und Logik Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Permutationen

Eine nichtwiederholende Anordnung sämtlicher Elemente einer endlichen Menge heißt auch *Permutation*. Für Permutationen hat sich eine Listenschreibweise eingebürgert.

Sämtliche Permutationen von $S = \{a, b, c\}$ sind:
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Ist $\pi = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ eine Permutation der Menge $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, so definiert π eine Bijektion $f_\pi : S \to S, a_j \mapsto a_{i_j}$.
Umgekehrt definiert eine Bijektion $f : S \to S$ eine Permutation; betrachte nämlich die Darstellung von f durch eine *Wertetabelle*;
die zweite Zeile entspricht der Permutation in Listenschreibweise.
$\rightsquigarrow$ Satz: Die Zahl aller Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.
Hinweis: Ein direkter Beweis ist kürzer als unserer aus der vorigen Vorlesung, siehe Meinel-Buch

Eine **k-Permutation** einer endlichen Menge S ist eine Permutation einer k-elementigen Teilmenge von S.

Sämtliche 2-Permutationen von $S = \{a, b, c\}$ sind:
(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

Schreibweise: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ bezeichne die Anzahl der k-Permutationen einer n-elementigen Menge.

Satz: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!}$ für $n \geq k \geq 0$.

Beweis: Betrachte eine Menge mit n Elementen. Den Beweis führen wir durch Induktion über k.
Für $k = 0$ ist die leere Permutation $()$ die einzige Möglichkeit. ✓
Angenommen, die Behauptung gelte für beliebige n und für $k < n$.
Wie viele $(k+1)$-Permutationen von S gibt es?
Für $a \in S$ sei Π_a die Menge aller $(k+1)$-Permutationen, die mit a beginnen. Die Menge aller $(k+1)$-Permutationen ergibt sich als disjunkte Vereinigung aller Π_a, also gilt nach der Summenformel:

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{a \in S} |\Pi_a|.$$

Die $(k+1)$-Permutationen aus Π_a lassen sich ansehen als (a, π), wobei π eine k-Permutation von $S \setminus \{a\}$ ist. Umgekehrt liefert jede k-Permutation von $S \setminus \{a\}$ ein Element aus Π_a. Daher gilt:

$$|\Pi_a| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{(n-1)\,!}{(n-k-1)\,!},$$

unabhängig von der Wahl von a (gemäß IV). Daher folgt:

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = n \cdot \frac{(n-1)\,!}{(n-k-1)\,!} = \frac{n\,!}{(n-(k+1))\,!}$$

k-Permutationen

Hinweis: Spezialisierung auf $n = k$ liefert vorvorigen Satz.

Beispiel: Beim Pferdetoto “3 aus 18” müssen aus 18 Teilnehmern eines Pferderennens die ersten 3 Pferde in richtiger Reihenfolge angegeben werden.
Wieviele Möglichkeiten gibt es?
$18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$.

Permutationen und Kombinationen

Eine k-*Kombination* einer n-elementigen Menge S ist eine ungeordnete Auswahl von k Elementen aus S. Die Anzahl der k-Kombinationen von S ist gleich $\binom{n}{k}$.

Satz: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ für $n \geq k \geq 0$.

Beweis: Betrachte eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge S. Dann gibt es $k!$ Permutationen von T.

Die Anzahl der k-Permutationen ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der k-elementigen Teilmengen und der Anzahl der Permutationen dieser Teilmengen.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Das Pascalsche Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

enthält viele kombinatorische Geheimnisse

Das Pascalsche Dreieck und die Fibonacci-Zahlen

als Summe “schräger Diagonalen”

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
&&&&&&& 1 && 1 &&&&&&& \\
&&&&&& 1 && 2 && 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && \boxed{4} && 6 && 4 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 5 && 10 && \boxed{10} && 5 && 1 &&& \\
&& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && \boxed{6} && 1 && \\
& 1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && \boxed{1} & \\
1 && 8 && 28 && 56 && 70 && 56 && 28 && 8 && 1
\end{array}
$$

Eine Variante des **Pascalschen Dreiecks**:

Der nächste Eintrag ergibt sich als Summe dreier darüberstehender.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}
$$

hat Bezug zur **Schachmathematik**: Das Dreieck entspricht der Zahl der möglichen Pfade eines Schachkönigs, die er (bei minimaler Anzahl von Zügen) nehmen kann, um vom obersten Feld des Rasters jenes mit der entsprechenden Zahl zu erreichen.

1	3	6	7	6	3	1
3	1	2	3	2	1	3
6	2	1	1	1	2	6
7	3	1	♔	1	3	7
6	2	**1**	**1**	**1**	2	6
3	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	3
1	**3**	**6**	**7**	**6**	**3**	**1**

Die Pascalsche Rekursion

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $n \geq k \geq 1$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis: kombinatorisch (!) Es sei A eine n-elementige Menge und fixiere $a \in A$.
$A' = A \setminus \{a\}$ ist eine $(n-1)$-elementige Menge.
Betrachte jetzt eine k-elementige Teilmenge B von A.
1. Fall: $a \in B$. Dann ist $B \setminus \{a\}$ eine $(k-1)$-elementige Teilmenge von A'.
2. Fall: $a \notin B$. Dann ist B eine k-elementige Teilmenge von A'.
In dieser Weise lässt sich eine Bijektion zwischen

$$\binom{A}{k} \quad \text{und} \quad \binom{A'}{k-1} \cup \binom{A'}{k}$$

konstruieren.

Die Pascalsche Rekursion

gestattet eine induktive Definition der Binomialkoeffizienten:

1. Für alle natürlichen Zahlen n sei $\binom{n}{0} = 1$.
2. Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $n < k$ sei $\binom{n}{k} = 0$.
3. Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $n \geq k \geq 1$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Die Gleichung von Vandermonde verallgemeinert die Pascalsche Rekursion:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

Beweis: Sei die $(n+m)$-elementige Menge A partitioniert in B und C mit $|B| = m$, $|C| = n$.
Jede k-elementige Teilmenge von A hat i Elemente von B und $k-i$ Elemente von C.
Dies liefert eine Bijektion zwischen

$$\binom{A}{k} \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=0}^{k} \binom{B}{i} \times \binom{C}{k-i}$$

Zwei weitere Identitäten mit schwieriger kombinatorischer Interpretation:

1.

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}$$

2.

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{k-i}$$

Beweis: (nur für die erste Beziehung)
Wir führen einen Induktionsbeweis über n.
IA: $n = 0$ ✓ (Achtung: Fallunterscheidung $k = 0$, $k \geq 1$.)
IV: Für n sei die Bauptung richtig.
IS:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{k} &= \binom{n+1}{k} + \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} \\ &= \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \\ &= \binom{n+2}{k+1} \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} y^j.$$

Beweis: Ausmultiplizieren der linken Seite $\leadsto$ Summe von Produkten der Form $x^{n-j}y^j$. Jeder Summand entsteht, indem aus jedem der n Faktoren $(x+y)$ das x oder das y ausgewählt wird. So entspricht jedem Summanden eine Teilmenge A von $\{1,\ldots,n\}$, die die Fälle aufsammelt, in denen y ausgewählt wurde.

$$(x+y)^n = \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} \left(\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus A} x \cdot \prod_{i\in A} y \right) = \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} x^{n-|A|} y^{|A|} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{A\in \binom{\{1,\ldots,n\}}{j}} x^{n-|A|} y^{|A|}$$

Numerische Hilfen

Satz: (*Stirlingsche Formel*) Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \leq n\,! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{12n}}$$

Folgerung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^{k} \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^{k}$$

Urnenmodelle, siehe auch wieder Matheprisma

In der Kombinatorik werden oft modellhaft *Urnen* betrachtet, aus denen nach einer bestimmten Vorschrift Kugeln gezogen werden.
Der Grund dafür: Viele Zufallsexperimente lassen sich als Ziehung von k Kugeln aus einer Urne darstellen, die insgesamt n Kugeln enthält.

Die vier Grundaufgaben der Kombinatorik

Es gibt insgesamt vier verschiedene Urnenexperimente, je nachdem,
* ob die Kugeln zurückgelegt werden
* oder die Kugeln nicht zurückgelegt werden
* und ob die Reihenfolge beachtet wird
* oder ob die Reihenfolge nicht beachtet wird.

Weitere nette Erläuterungen finden Sie hier.

1. Urnenmodell: mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: “Wurf mit zwei Würfeln”.
Sie können dieses Zufallsexperiment auch so mit einer Urne simulieren.
Eine Urne enthält sechs Kugeln, die mit den Ziffern 1 bis 6 beschriftet sind.
Sie
– ziehen zufällig eine Kugel und notieren das Ergebnis (z.B. 4),
– legen die Kugel in die Urne zurück und schütteln die Urne gut durch,
– ziehen wieder eine Kugel und notieren das Ergebnis
(das könnte z.B. wieder die “4” sein, da Sie diese Kugel nach dem ersten Zug zurückgelegt haben).

Hier ist die Reihenfolge der gezogenen Kugeln wichtig. Es ist $n = 6$ (sechs Kugeln in der Urne) und $k = 2$ (zweimaliges Ziehen).

1. Urnenmodell: mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

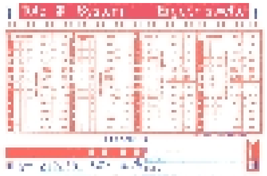
Satz: Für die Auswahl (Ziehung)

* von k Elementen (Kugeln)
* aus einer Menge mit n Elementen (Urne)
* mit Wiederholung (Zurücklegen)
* und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es

$$n^k$$

Möglichkeiten.

1. Urnenmodell: mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge



Beispiel: Als Totospieler kaufen Sie einen Totoschein, auf dem Sie die Spielergebnisse von elf ausgewählten Fußballbegegnungen raten können.
Dabei genügt es, die Tendenz vorherzusagen:
Auf dem Spielschein müssen Sie 1 ankreuzen, wenn Sie auf den Sieg der Heimmannschaft tippen, 2 für einen Sieg der Gastmannschaft und schließlich 0 für ein Unentschieden.

Können Sie angeben, wieviele Möglichkeiten es gibt, den Totoschein auszufüllen? $\rightsquigarrow$ 177147

2. Urnenmodell: ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Satz: Für die Auswahl

* von k Elementen
* aus einer Menge mit n Elementen
* ohne Wiederholung
* und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

viele Möglichkeiten.

Beispiel: Pferdewette (s.o.)

3. Urnenmodell: ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: Ziehen von 10 Karten aus einem 32er Skatspiel
Hier sind die 32 Kugeln in der Urne mit den Namen der Spielkarten beschriftet (z.B. Karo-Bube).
Sie
– ziehen zehn Kugeln aus der Urne,
– legen aber die Kugeln nach jedem Zug nicht zurück.

(Haben Sie beim Skatspiel einmal z.B. die Karte Karo-Bube gezogen, so können Sie diese nicht noch einmal ziehen.)

Die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen wurden, ist Ihnen hier egal. (Sie interessiert nur, welche Karten Sie überhaupt gezogen haben.) Es ist $n = 32$ (32 Kugeln in der Urne) und $k = 10$ (10 Mal Ziehen).

3. Urnenmodell: ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

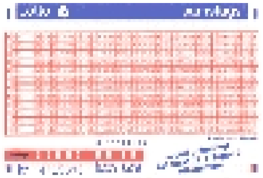
Satz: Für die Auswahl

* von k Elementen
* aus einer Menge mit n Elementen
* ohne Wiederholung
* und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es

$$\binom{n}{k}$$

viele Möglichkeiten.

3. Urnenmodell: ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge



Beispiel: Sie kaufen an der Lottoannahmestelle einen Lottoschein, auf dem Sie aus 49 Zahlen sechs ankreuzen. Samstagabends werden dann in einer maschinellen Urnenziehung (ohne Zurücklegen) die sechs Gewinnzahlen ermittelt.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, den Lottoschein auszufüllen ? $\leadsto$ 13983816

4. Urnenmodell: mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Satz: Für die Auswahl

* von k Elementen
* aus einer Menge mit n Elementen
* mit Wiederholung
* und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es

$$\binom{n+k-1}{k}$$

viele Möglichkeiten.

Beispiel: Bei einem Sonderangebot kann man sich eine Kiste (zwölf Flaschen) aus drei verschiedenen Getränkesorten beliebig zusammenstellen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

4. Urnenmodell: mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Beweis: Wir betrachten o.E. die Menge $S = [n]$.

Eine Ziehung von k Elementen aus S mit Zurücklegen liefert eine Reihe von Zahlen, die wir im Nachhinein (in der üblichen Weise) sortieren können; wir erhalten so: $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{k-1}$.

Durch $b_j = a_j + j$ erhalten wir eine Zahlenfolge mit $b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-1}$ mit $b_j \in [n + k - 1]$.

Umgekehrt können wir jede k-elementige Teilmenge von $[n+k-1]$ zunächst sortieren und dann in eine schwach wachsende Folge aus $[n]$ umrechnen.