Diskrete Strukturen und Logik

WiSe 2007/08 in Trier

Henning Fernau
Universität Trier
fernau@uni-trier.de

$\boxed{\text{Diskrete Strukturen und Logik}}$ Gesamtübersicht

- Organisatorisches
- Einführung
- Logik & Mengenlehre
- Beweisverfahren
- Kombinatorik: Die Kunst des Zählens
- algebraische Strukturen

Boolesche Algebren

Syntax (Aussehen)

Eine *Boolesche Algebra* ist beschrieben durch ein 6-Tupel $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$:

B: Grundmenge

$\oplus, \otimes : B \times B \longrightarrow B$: zweistellige Verknüpfungen auf B

$\kappa : B \longrightarrow B$: einstellige Operation auf B

$0, 1 \in B$: Konstanten (nullstellige Operationen)

Boolesche Algebren: geforderte Eigenschaften

$0 \neq 1$
Kommutativgesetze: (1) $\forall a, b \in B : a \oplus b = b \oplus a$, (2) $\forall a, b \in B : a \otimes b = b \otimes a$.
Distributivgesetze: (1) $\forall a, b, c \in B : a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ und (2) $\forall a, b, c \in B : a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
Neutralitätsgesetze: (1) 0 ist *rechtsneutrales Element* bzgl. $\oplus$, d.h.: $a \oplus 0 = a$ und (2) 1 ist *rechtsneutrales Element* bzgl. $\otimes$, d.h.: $a \otimes 1 = a$
Komplementgesetze: (1) $\kappa(a)$ ist das *Komplement* von a, d.h.: (1) $a \oplus \kappa(a) = 1$ und (2) $a \otimes \kappa(a) = 0$.

0 heiß auch *Nullelement*, 1 *Einselement* von $\mathcal{B}$.

Boolesche Algebren: mehr Distributivgesetze

Satz: In einer Booleschen Algebra gelten neben den genannten noch weitere Distributivgesetze: (1a) $\forall a, b, c \in B : (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$ und (2a) $\forall a, b, c \in B : (b \otimes c) \oplus a = (b \oplus a) \otimes (c \oplus a)$

Beweis: Insgesamt dreimalige Anwendung des Kommutativgesetzes (für $\otimes$) und einmalige Anwendung des Distributivgesetzes (1) liefert:

$$(b \oplus c) \otimes a = a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).$$

Ganz entsprechend sieht man die Aussage (2a).

Ganz entsprechend ? Das nennen wir auf der folgenden Folie vornehmer *dual*. Die Kommutativität erlaubt es uns, auch noch weitere gültige Komplementgesetze zu formulieren.

Boolesche Algebren: Das Dualitätsprinzip I

Eine Eigenschaft P Boolescher Algebren kann naturgemäß mit Hilfe der Operationen $\oplus, \otimes, \kappa, 0, 1$ ausgedrückt werden.
Eigenschaft P' heiß *dual* zu P, falls sie aus P durch gleichzeitiges Vertauschen aller $\oplus$ und $\otimes$-Operatoren sowie aller Konstanten 0 und 1 entsteht.

Satz: Mit der Eigenschaft P gilt auch stets die duale Eigenschaft P' in einer Booleschen Algebra.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Symmetrie der Definition.

Boolesche Algebren: Eindeutigkeit der neutralen Elemente

Satz: Das Einselement ist eindeutig bestimmt und ist auch ein linksneutrales Element bzgl. $\otimes$.

Beweis: Wären 1 und $1'$ Einselemente, so gölte: $1 \otimes 1' = 1$ und $1' \otimes 1 = 1'$ (Rechtseinseigenschaften).

Da $\otimes$ kommutativ, gilt aber auch: $1 \otimes 1' = 1' \otimes 1$, also $1 = 1'$.

Folgerung: Das Nullelement ist eindeutig bestimmt und ist auch ein linksneutrales Element bgzl. $\oplus$.

Boolesche Algebren: Idempotenz

Eine Operation $\circ$ auf der Menge M heißt *idempotent*, falls $\forall x \in M : x \circ x = x$ gilt.

Satz: In jeder Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ sind sowohl $\oplus$ als auch $\otimes$ idempotent.

Beweis: Aufgrund des Dualitätsprinzips brauchen wir die Aussage nur für eine der Operationen zu zeigen.

$$\begin{array}{rcll} x \otimes x & = & (x \otimes x) \oplus 0 & \text{Neutralitätsgesetz} \\ & = & (x \otimes x) \oplus (x \otimes \kappa(x)) & \text{Komplementgesetz} \\ & = & x \otimes (x \oplus \kappa(x)) & \text{Distributivgesetz} \\ & = & x \otimes 1 & \text{Komplementgesetz} \\ & = & x & \text{Neutralitätsgesetz} \end{array}$$

Boolesche Algebren: Dominanzgesetze

Satz: In jeder Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ gelten zwei *Dominanzgesetze*: $a \oplus 1 = 1$ und $a \otimes 0 = 0$.

Beweis: Aufgrund des Dualitätsprinzips brauchen wir die Aussage nur für eine der Operationen zu zeigen.

$$\begin{array}{rcll}
a \oplus 1 & = & (a \oplus 1) \otimes 1 & \text{Neutralitätsgesetz} \\
& = & (a \oplus 1) \otimes (a \oplus \kappa(a)) & \text{Komplementgesetz} \\
& = & a \oplus (1 \otimes \kappa(a)) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & a \oplus \kappa(a) & \text{Neutralitätsgesetz} \\
& = & 1 & \text{Komplementgesetz}
\end{array}$$

Boolesche Algebren: Verschmelzungs- oder Absorptionsgesetze

Satz: In jeder Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ gelten zwei *Verschmelzungsgesetze* (*Absorptionsgesetze*): $a \oplus (a \otimes b) = a$ und $a \otimes (a \oplus b) = a$.

Beweis: Aufgrund des Dualitätsprinzips brauchen wir die Aussage nur für eine der Operationen zu zeigen.

$$\begin{array}{rcll} a \oplus (a \otimes b) & = & (a \otimes 1) \oplus (a \otimes b) & \text{Neutralitätsgesetz} \\ & = & a \otimes (1 \oplus b) & \text{Distributivgesetz} \\ & = & a \otimes (b \oplus 1) & \text{Kommutativgesetz} \\ & = & a \otimes 1 & \text{Dominanzgesetz} \\ & = & a & \text{Neutralitätsgesetz} \end{array}$$

Boolesche Algebren: Vereinfachung von Gleichungen ...

Satz: In jeder Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ kann man aus $b \oplus a = c \oplus a$ und aus $b \oplus \kappa(a) = c \oplus \kappa(a)$ auf $b = c$ schließen.

Wie lautet die duale Vereinfachungsregel ?
Und was bedeutet das in aussagenlogischer Deutung ?

Beweis: Zunächst eine Vorüberlegung. Es sei $x \in B$ beliebig.

$$\begin{array}{rcll} (x \oplus a) \otimes (x \oplus \kappa(a)) & = & x \oplus (a \otimes \kappa(a)) & \text{Distributivgesetz} \\ & = & x \oplus 0 & \text{Komplementgesetz} \\ & = & x & \text{Neutralitätsgesetz} \end{array}$$

Nach Voraussetzung gilt $b \oplus a = c \oplus a$ und $b \oplus \kappa(a) = c \oplus \kappa(a)$.

Damit gilt auch: $(b \oplus a) \otimes (b \oplus \kappa(a)) = (c \oplus a) \otimes (c \oplus \kappa(a))$.

Nach der Vorüberlegung ist die linke Seite der Gleichung gleich b und die rechte gleich c

$\leadsto$ Beh.

Boolesche Algebren und Monoide

Satz: Es sei $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra. Dann bilden $\mathcal{B}_+ = (B, \oplus, 0)$ und $\mathcal{B}_* = (B, \otimes, 1)$ kommutative Monoide.

Beweis: Zu zeigen bleibt das Assoziativitätsgesetz.

Beweisgedanke: Wir zeigen zunächst zwei Hilfsaussagen:

(1) $\forall a, b, c \in B : ((a \oplus b) \oplus c) \otimes a = (a \oplus (b \oplus c)) \otimes a$ und

(2) $\forall a, b, c \in B : ((a \oplus b) \oplus c) \otimes \kappa(a) = (a \oplus (b \oplus c)) \otimes \kappa(a)$.

Aus der Vereinfachungsregel folgt dann die Behauptung.

Hilfsaussage (1) zum Assoziativitätsgesetz

$$
\begin{array}{rcll}
((a \oplus b) \oplus c) \otimes a & = & a \otimes ((a \oplus b) \oplus c) & \text{Kommutativgesetz} \\
& = & (a \otimes (a \oplus b)) \oplus (a \otimes c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & a \oplus (a \otimes c) & \text{Absorptionsgesetz} \\
& = & a & \text{Absorptionsgesetz} \\
& = & a \otimes (a \oplus (b \otimes c)) & \text{Absorptionsgesetz} \\
& = & (a \oplus (b \oplus c)) \otimes a & \text{Kommutativgesetz}
\end{array}
$$

Hilfsaussage (2) zum Assoziativitätsgesetz

$$
\begin{array}{rcll}
((a \oplus b) \oplus c) \otimes \kappa(a) & = & \kappa(a) \otimes ((a \oplus b) \oplus c) & \text{Kommutativgesetz} \\
& = & (\kappa(a) \otimes (a \oplus b)) \oplus (\kappa(a) \otimes c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & ((\kappa(a) \otimes a) \oplus (\kappa(a) \otimes b))) \oplus (\kappa(a) \otimes c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & (0 \oplus (\kappa(a) \otimes b)) \oplus (\kappa(a) \otimes c) & \text{Komplementgesetz} \\
& = & (\kappa(a) \otimes b) \oplus (\kappa(a) \otimes c) & \text{Komplementgesetz} \\
& = & \kappa(a) \otimes (b \oplus c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & 0 \oplus (\kappa(a) \otimes (b \oplus c)) & \text{Neutralitätsgesetz} \\
& = & (\kappa(a) \otimes a) \oplus (\kappa(a) \otimes (b \oplus c)) & \text{Komplementgesetz} \\
& = & \kappa(a) \otimes (a \oplus (b \oplus c)) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & (a \oplus (b \oplus c)) \otimes \kappa(a) & \text{Kommutativgesetz}
\end{array}
$$

Boolesche Algebren: Eindeutigkeit des Komplements

Satz: In einer Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ gilt: Aus $a \oplus b = 1$ und $a \otimes b = 0$ folgt $b = \kappa(a)$.

<u>Beweis:</u> Aus $a \oplus b = 1$ folgt durch Multiplikation von $\kappa(a)$ von links (linke Seite):

$\kappa(a) \otimes (a \oplus b) = (\kappa(a) \otimes a) \oplus (\kappa(a) \otimes b) = 0 \oplus (\kappa(a) \otimes b) = \kappa(a) \otimes b.$

Die rechte Seite ergibt: $\kappa(a) \otimes 1 = \kappa(a).$

Aus $\kappa(a) \oplus a = 1$ folgt durch Multiplikation von b von rechts (linke Seite):

$(\kappa(a) \oplus a) \otimes b = (\kappa(a) \otimes b) \oplus (a \otimes b) = (\kappa(a) \otimes b) \oplus 0 = \kappa(a) \otimes b.$

Die rechte Seite ergibt: $1 \otimes b = b.$

Das ergibt zusammen: $\kappa(a) \otimes b = \kappa(a) = b.$

Welche Rechengesetze wurden angewendet ?

Boolesche Algebren: Die Gesetze von De Morgan

Satz: In einer Booleschen Algebra $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ gilt: $\kappa(a \oplus b) = \kappa(a) \otimes \kappa(b)$ und dual: $\kappa(a \otimes b) = \kappa(a) \oplus \kappa(b)$.

Beweis: Wir benutzen den Satz von der Eindeutigkeit des Komplements im Beweis.

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b) \otimes (\kappa(a) \otimes \kappa(b)) &= (a \otimes (\kappa(a) \otimes \kappa(b))) \oplus (b \otimes (\kappa(a) \otimes \kappa(b))) \\
&= (a \otimes (\kappa(a) \otimes \kappa(b))) \oplus (b \otimes (\kappa(b) \otimes \kappa(a))) \\
&= ((a \otimes \kappa(a) \otimes \kappa(b))) \oplus ((b \otimes \kappa(b)) \otimes \kappa(a)) \\
&= 0 \oplus 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus (\kappa(a) \otimes \kappa(b)) &= (a \oplus b \oplus \kappa(a)) \otimes (a \oplus b \oplus \kappa(b)) \\
&= 1 \otimes 1 = 1
\end{aligned}
$$

Boolesche Algebren: Weitere Eigenschaften

Satz: Komplementarität der neutralen Elemente: $\kappa(0) = 1$ und $\kappa(1) = 0$.

<u>Beweis:</u> Neutralitätsgesetze liefern: $0 \oplus 1 = 1$ und $0 \otimes 1 = 0$; Komplementgesetze ergeben $0 \oplus \kappa(0) = 1$ und $0 \otimes \kappa(0) = 0$, woraus mit der Eindeutigkeit des Komplements die eine Behauptung folgt; die andere folgt dual.

Satz: Gesetz vom doppelten Komplement: $\kappa(\kappa(a)) = a$.

<u>Beweis:</u> Aus dem Komplementgesetz (einmal für a und dann für $\kappa(a)$) und dem Kommutativitätsgestz folgt:
$\kappa(a) \oplus a = 1$ und $\kappa(a) \oplus \kappa(\kappa(a)) = 1$ sowie
$\kappa(a) \otimes a = 0$ und $\kappa(a) \otimes \kappa(\kappa(a)) = 0$,
woraus mit der Eindeutigkeit des Komplements die Behauptung folgt.

Boolesche-Algebra-Morphismen

Wir hatten in VL20 den Begriff des Morphismus, also der strukturerhaltenen Abbildung, kennengelernt. Was bedeutet dies für Boolesche Algebren ?

$\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$ und $\mathcal{B}' = (B', \oplus', \otimes', \kappa', 0', 1')$ seien B.A.

$h : B \to B'$ heißt (B.A.-Homo)morphismus gdw.

(1) $\forall a, b \in B : h(a \oplus b) = h(a) \oplus' h(b)$

(2) $\forall a, b \in B : h(a \otimes b) = h(a) \otimes' h(b)$

(3) $\forall a \in B : h(\kappa(a)) = \kappa'(h(a))$

(4) $h(0) = 0'$ und $h(1) = 1'$.

Satz: Für B.A.-Morphismen genügt der Nachweis von (1), (2) und (4).

<u>Beweis:</u> (3) folgt aus der Eindeutigkeit des Komplements in $\mathcal{B}'$.

<u>Hinweis:</u> (2) lässt sich oft “dual” zu (1) zeigen. Weiß man jedoch (3), kann man aber immer auf den Nachweis von entweder (1) oder (2) verzichten aufgrund der de Morganschen Gesetze.

Boolesche Algebren: Das Dualitätsprinzip II

Satz: Der Komplementoperator κ kann als Isomorphismus aufgefasst werden.

Beweis: Betrachte B.A. $\mathcal{B} = (B, \oplus, \otimes, \kappa, 0, 1)$.

$\mathcal{B}' = (B, \otimes, \oplus, \kappa, 1, 0)$ heißt auch *duale Boolesche Algebra*.

$\kappa : B \longrightarrow B$ ist bijektiv. ✓

Die Morphismuseigenschaften ergeben sich aus den Gesetzen von De Morgan.

Was haben wir sonst so in der Vorlesung gemacht ?

Wir haben uns insbesondere die in dieser Vorlesung kennengelernten Rechen-regeln klargemacht anhand der
— Potenzmengenalgebren und der
— Teileralgebren.