

# Formale Sprachen (parallele und regulierte Ersetzung)

SoSe 2008 in Trier

Henning Fernau

Universität Trier

fernau@uni-trier.de

## **Formale Sprachen** Gesamtübersicht

- Organisatorisches / Einführung  
Motivation / Erinnerung / Fragestellungen
- Diskussion verschiedener Sprachklassen:  
gesteuerte Ersetzungsverfahren  
parallele Ersetzungsverfahren
- Algebraische Ansätze:  
abstrakte Sprachfamilien  
formale Potenzreihen

## Organisatorisches

Vorlesung: Mittwochs 12-14 Uhr, HZ 203,

**Vorschlag:** 12.25-13.55 (schafft bequemere Mittagspause)

Übungen (Stefan Gulan): Montags 16-18 Uhr, HZ 204

Beginn 2. Semesterwoche **vierzehntägig ??**

**Dozentensprechstunde** DO, 13-14 in meinem Büro H 410 (4. Stock)

gleichzeitig: Sprechstunde von Herrn Gulan

Kontakt: fernau@uni-trier.de

Hausaufgaben / Schein ?! n.V.

## Motivation

Theoretische Informatik (ThI) versucht ganz allgemein mathematische Grundlagen der Informatik bereitzustellen.

Die konkreten Ausprägungen von ThI müssen immer in diesem Kontext gesehen werden.

Ursprüngliche (Informatik-)Motivation

für die Entwicklung der Formalen Sprachen war der *Compilerbau*.

## Einordnung

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie sind die klassischen Gebiete der Theoretischen Informatik, und zwar unabhängig von nationalen Moden.

Während sonst in Deutschland beispielsweise die Algorithmik stark die Theoretische Informatik dominiert, herrschen in Frankreich eher Logik und Semantik vor.

Stets gehören aber FS und KT zum Kanon der Theorie.

Wir können und werden daher hier auch auf Ihre Kenntnisse aus den Grundvorlesungen aufbauen.

**Erinnerung:** Chomsky-Hierarchie...

war zunächst linguistisch, nicht informatisch motiviert.

Entsprechungen bei den Compilerbau-Phasen:

lexikalische Analyse (Scanner): Reguläre Sprachen, Typ 3

syntaktische Analyse (Parsing): Kontextfreie Sprachen, Typ 2

semantische Analyse: muss immer noch entscheidbar sein...

**Weitere Eigenschaften**, motiviert aus Compilerbau:

*Determiniertheit*: Jedes Programm sollte eine eindeutig bestimmte, “leicht” zu ermittelnde Bedeutung besitzen.

noch einschränkender: *Determinismus* (Schritt für Schritt bestimmt)

*Nichtdeterminismen* gestatten aber manchmal einfachere, evtl. “menschlichere” Spezifikationen (z.B. durch reguläre Ausdrücke.

*Transduktionen*: ein vornehmer Ausdruck für übersetzende Maschinen:

Es genügt nicht, wenn der Compiler antwortet: “Ja, dies ist ein syntaktisch korrektes C-Programm !”

Stattdessen sollte (wenigstens dann) auch eine gültige Übersetzung in Maschinencode erfolgen.

## Weitere Motivationen

*Linguistik*: eigentlich die “ursprüngliche”, aber Anwendungen von Computern auf natürliche Sprachen sind nicht nur ein spannendes Gebiet (Computerlinguistik), sondern werfen immer wieder auch neue theoretische Fragestellungen auf.

*Sondersprachen*: Es gibt ja nicht nur C, JAVA, u.ä. “Hochsprachen”, die alle mehr oder minder erfolgreich als universelle Programmiersprachen dienen. In ihrer Masse evtl. noch wichtiger sind Spezialsprachen für Datenbanken, semistrukturierte Dokumente (XML), Graphik, Internet etc. Die dort auftretenden Effekte lassen sich zumeist sauber mit formalen Sprachen beschreiben.



## Anwendungen in der Computergraphik

Zwei Vorgehensweisen:

1. Betrachte genuine Beschreibungsverfahren für Bilder anstelle von Wörtern
2. Deute Wörter als Beschreibungen von Bildern und benutze die “üblichen” Wortbeschreibungsverfahren.

Besonders bekannt: *Kettencodes* und *Turtle-Graphik* (Codierung absoluter bzw. relativer Bewegungen)

~> Abschnitt über parallele Ersetzungsverfahren (Lindenmayer-Systeme)

## Fragestellungen: Hierarchiefragen

Formale Sprachen (FS) untersuchen Sprachbeschreibungsmechanismen (SBM) (Grammatiken, Automaten, Ausdrücke) gewisser, vorgegebener Bauart und damit Sprachklassen.

Man kann zwei oder mehrere SBM vergleichen, indem man die zugehörigen Sprachklassen (aufgefasst als Mengen von Sprachen) mengentheoretisch miteinander vergleicht. Dies führt insbesondere auf *Hierarchiefragen*.

**Beispiel:** Chomsky-Hierarchie:

$$\mathbf{REG} \subsetneq \mathbf{KF} \subsetneq \mathbf{KS} (\subsetneq \mathbf{ENT}) \subsetneq \mathbf{RA}$$

oder kürzer:

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0$$

## Ersetzungssysteme

1. Ein *(sequentielles) Ersetzungssystem* ist ein Paar  $ES = (V, F)$ , wobei
  - $V$  ein Alphabet
  - $F$  eine endliche Teilmenge von  $V^* \times V^*$  ist.

Die Elemente  $(x, y) \in F$  heißen *(Ersetzungs-) Regeln* oder *Produktionen*.  
Schreibweise:  $x \rightarrow y$ .

2. Ein Wort  $v \in V^*$  leitet (direkt bzw. in einem Schritt) ein Wort  $w \in V^*$  ab genau dann, wenn

$$\exists z, z' \in V^* : \exists x \rightarrow y \in F : (v = zxz' \wedge w = zyz')$$

Schreibweise:  $x \Rightarrow_{ES}^1 y$  bzw.  $x \Rightarrow y$ , wenn das Ersetzungssystem aus dem Kontext hervorgeht. *Ein-Schritt-Ableitungsrelation*

$\Rightarrow_{ES}^*$  bezeichnet den *reflexiv-transitiven Abschluss* von  $\Rightarrow_{ES}$ :

$v \Rightarrow_{ES}^* w \iff v = w \vee \exists u \in V^* : (v \Rightarrow_{ES}^* u \wedge u \Rightarrow_{ES}^1 w)$ , d.h., gilt  $v \Rightarrow_{ES}^* w$ , so existieren  $v = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = w \in V^*, k \in \mathbb{N}$  und  $u_{i-1} \Rightarrow_{ES}^1 u_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Die Folge  $(u_0, \dots, u_k)$  heißt dann eine *Ableitung* von  $v$  nach  $w$  (bzgl. ES der Länge  $k$ ).

$v \Rightarrow_{ES}^k w \iff$  es gibt in ES eine Ableitung von  $v$  nach  $w$  der Länge  $k$ .

3. Sei  $AX \subseteq V^*$  eine *Axiomenmenge*.

Die von ES aus  $AX$  *erzeugte Sprache*:

$$L_g(ES, AX) = \{w \mid \exists v \in AX : v \Rightarrow_{ES}^* w\}.$$

Die von ES mit  $AX$  *akzeptierte Sprache*:

$$L_a(ES, AX) = \{w \mid \exists v \in AX : w \Rightarrow_{ES}^* v\}.$$

## Bemerkungen:

- Die Ableitung von Wörtern ist nicht eindeutig, d.h., weder die Reihenfolge noch die Anwendungsstelle von Produktionen muss deterministisch sein.

Beispiele:

(1)  $F = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow D, A \rightarrow C, C \rightarrow D \}$  hat Ableitungen  $(A, B, D)$  und  $(A, C, D)$ .

(2)  $F' = \{ A \rightarrow bAA \}$  hat Ableitungen  $(AA, AbAA, bAAbAA)$  und  $(AA, bAAA, bAAbAA)$ .

(3)  $F'' = \{ A \rightarrow AbA \}$  zeigt bei der Ableitung  $(AbA, AbAbA)$  eine Art "interner Mehrdeutigkeit", da selbst bei Vorgabe der Ableitung nicht klar ist, wo ersetzt wurde.

- Ersetzungssysteme entsprechen *Semi-Thue-Systemen*. Hingegen werden bei *Thue-Systemen* ungerichtete Regeln betrachtet, also der reflexiv-transitiv-symmetrische Abschluss bezüglich der Ableitungen. In Vorlesungen über Termersetzungssysteme werden Sie es mit Thue-Systemen zu tun bekommen.

**Übungsvorschlag:** Versuchen Sie, die Arbeitsweise einer (Ein-Band-)Turing-Maschine als Ersetzungssystem zu formalisieren.

**Beispiel:**  $F = \{a \rightarrow aba, aa \rightarrow b\}$ ,  $V = \{a, b\}$ ,  $ES = \{V, F\}$

$$L_g(ES, \{a\}) = a(ba)^* = (ab)^*a$$

$$L_g(ES, \{aa\}) = (ab)^*aa(ba)^* \cup (ab)^*b(ba)^*$$

$$L_a(ES, b^*) \cap a^* = \{a^n \mid n \geq 2\}$$

$$L_g(ES, a^n) \cap b^* = \{b^m \mid m = 2n - 3, 2n - 6, 2n - 9, \dots, 2n - 3j \geq 3\} (n \neq 2, 4):$$

$$a^2 \Rightarrow b$$

$$a^3 \Rightarrow a^2ba^2 \Rightarrow b^2a \Rightarrow b^3$$

$$a^4 \Rightarrow a^2b \Rightarrow b^2$$

$$a^5 \Rightarrow ba^3 \Rightarrow^* b^4$$

$$a^5 \Rightarrow a^3ba^3 \Rightarrow^* b^4a^3 \Rightarrow b^7$$

## (Chomsky-) Grammatiken

Eine *Grammatik* ist ein Quadrupel  $G = (V_N, V_T, S, P)$ , wobei

- $V_N$  ein Alphabet von *Nonterminalen* oder *Variablen*
- $V_T$  ein zu  $V_N$  disjunktes Alphabet von *Terminalen*
- $S \in V_N$  das *Axiom* oder *Startsymbol*
- $P \subseteq (V^* \circ V_N \circ V^*) \times V^*$  eine endliche Menge von *Regeln* oder *Produktionen*;  
hierbei ist  $V := V_N \cup V_T$ .

$(V, P)$  heißt dann das von  $G$  induzierte *Ersetzungssystem*. Die zugehörige *Ableitungsrelation* wird mit  $\Rightarrow_G^1$  und  $\Rightarrow_G^*$  bezeichnet. Die von  $G$  erzeugte Sprache  $L(G) := \{w \in V_T^* \mid S \Rightarrow_G^* w\} = L_g((V, P), \{S\}) \cap V_T^*$ .

### Beobachtung:

Man kann Grammatiken auch als Sprachanalysierer begreifen, indem man die von  $G$  akzeptierte Sprache als  $\{w \in V_T^* \mid w \Rightarrow_G^* S\} = L_a((V, P), \{S\}) \cap V_T^*$  definiert. Dann ist  $P \subseteq V^* \times (V^* \circ V_N \circ V^*)$ .



## Beispiele:

- Wir geben eine Grammatik für  $L_1 := \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \}$  an.  
 $G = (V_N, V_T, S, P)$  mit  $V_N = \{ R, S, T \}$ ,  $V_T = \{ a, b, c \}$  und

$$P = \{ S \rightarrow abc \mid aRbc, \\ Rb \rightarrow bR, \\ Rc \rightarrow Tbcc, \\ bT \rightarrow Tb, \\ aT \rightarrow aaR \mid aa \}$$

Wie kann man  $L_1 = L(G)$  zeigen? Z.B. kann man induktiv für alle  $i \geq 1$  (bzw.  $n \geq 0$ ) beweisen, dass  $L(i) := \{ w \in (V_N \cup V_T)^* \mid S \Rightarrow_G^{(i+1)i-1} w \} = \{ a^i b^i c^i, a^i R b^i c^i \}$  sowie  $L[n] := \{ w \in V_T^* \mid S \Rightarrow_G^n w \} \neq \emptyset \iff \exists i \geq 1 : n = (i+1)i - 1$  gilt. Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Der Induktionsanfang ist trivial. Gilt die Behauptung für ein gewisses  $i \geq 1$ , so finden wir als einzig mögliche Ableitungen:

$$a^i R b^i c^i \Rightarrow_G^i a^i b^i R c^i \Rightarrow_G^1 a^i b^i T b c^{i+1} \Rightarrow_G^i a^i T b^{i+1} c^{i+1} \Rightarrow_G^1 \left\{ \begin{array}{l} a^{i+1} b^{i+1} c^{i+1} \\ a^{i+1} R b^{i+1} c^{i+1} \end{array} \right.$$

Wegen  $(i + 2)(i + 1) - 1 - [(i + 1)i - 1] = 2(i + 1)$  folgt die Behauptung für  $L(i)$ . Aus der Eindeutigkeit der Ableitungsfolge ergibt sich auch sofort die Behauptung betreffs  $L[n]$ .

- Wir geben eine Grammatik für  $L_2 := \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$ .

$G = (V_N, V_T, S, P)$  mit

$V_N = \{ S, A, B, X, Y, Z \}$ ,  $V_T = \{ a, b \}$  und

$P = \{ S \rightarrow XYZ,$   
 $XY \rightarrow aXA \mid bXB \mid \lambda,$   
 $Aa \rightarrow aA,$   
 $Ab \rightarrow bA,$   
 $Ba \rightarrow aB,$   
 $Bb \rightarrow bB,$   
 $AZ \rightarrow YaZ,$   
 $BZ \rightarrow YbZ,$   
 $aY \rightarrow Ya,$   
 $bY \rightarrow Yb,$   
 $Z \rightarrow \lambda \}$

zum Induktionsschritt:

$$wXYwZ \Rightarrow_G^1 waXAwZ \Rightarrow_G^{|w|} waXwAZ \Rightarrow_G^1 waXwYaZ \Rightarrow_G^{|w|} waXYwaZ$$

## Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik  $G = (V_N, V_T, S, P)$  ist

- vom **Typ 0**  $\iff$  true (d.h., jede Grammatik ist vom Typ 0).
- vom **Typ 1 (kontextsensitiv)**  $\iff$   
$$\forall x \rightarrow y \in P : (\exists \alpha, \beta \in V^*, A \in V_N, v \in V^+ : x = \alpha A \beta \wedge y = \alpha v \beta) \vee$$
$$(x = S \wedge y = \lambda \wedge P \subseteq V^* V_N V^* \times (V \setminus \{S\})^*) \quad [*]$$

(d.h. die Regeln haben die Form  $\alpha A \beta \rightarrow \alpha v \beta$  bzw.  $S \rightarrow \lambda$  und  $S$  kommt in keiner rechten Regelseite vor).
- vom **Typ 2 (kontextfrei, algebraisch)**  $\iff \forall x \rightarrow y \in P : x \in V_N$   
(d.h. die Produktionen haben die Form  $A \rightarrow \alpha$ ).
- vom **Typ 3 (rechts-/linkslinear, rational, regulär)**  $\iff$   
 $P \subseteq V_N \times ((V_N \cup \{\lambda\}) V_T^*)$  (linkslinear) oder  
 $P \subseteq V_N \times (V_T^* (V_N \cup \{\lambda\}))$  (rechtslinear)  
(d.h. die Produktionen haben die Form  $A \rightarrow w$  und  $A \rightarrow Bw$  bzw.  $A \rightarrow wB$  für gewisse  $A, B \in V_N, w \in V_T^*$ ).

## Bemerkungen

Kontextsensitive Regeln sehen nur deshalb so kompliziert aus, weil wir noch die Ableitung des leeren Wortes ermöglichen wollen; nur dafür ist die “Ausnahmeregel”  $[*]$  gedacht.

**Übungsvorschlag:** Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für  $L := \{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ .

Hinweis: Die Begriffe algebraisch und rational entstammen einem weiteren Zugang zu den formalen Sprachen, nämlich dem sehr algebraisch-analytischen über formale Potenzreihen; dort finden sich tatsächlich erstaunliche Bezüge zu den entsprechenden Begriffen aus der Funktionentheorie.

**Lemma:** [ $\lambda$ -Freiheit] Zu jeder Typ-2-Grammatik  $G = (V_N, V_T, S, P)$  gibt es eine Typ-2-Grammatik  $G' = (V'_N, V_T, S', P')$  mit  $L(G) = L(G')$ , wobei gilt  $\forall x \rightarrow y \in P' : (x \in V_N \wedge y \in V^+) \vee (x = S' \wedge y = \lambda \wedge P' \subseteq V_N \times (V \setminus \{S'\})^*)$ , d.h. die Produktionen sind von der Form  $A \rightarrow \alpha$  bzw  $S' \rightarrow \lambda$ , wobei dann  $S'$  in keiner Produktion auf der rechten Regelseite auftritt.

**Beweis:**  $G = (V_N, V_T, S, P)$  sei eine Typ-2-Grammatik.

**[Schritt 1]** Bestimme die Menge  $V_\lambda := \{A \in V_N \mid A \Rightarrow_G^* \lambda\}$ , also die Menge der Nonterminale, von denen aus  $\lambda$  abgeleitet werden kann:

$$V_\lambda^0 := \{A \in V_N \mid A \rightarrow \lambda \in P\}$$

$$V_\lambda^{i+1} := \{A \in V_N \mid \exists A \rightarrow v \in P : v \in V_\lambda^{i*}\} \cup V_\lambda^i$$

Es gilt:  $V_\lambda^i \subseteq V_\lambda \subseteq V_N$  und  $V_\lambda^i \subseteq V_\lambda^{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots$

$$V_\lambda^i = V_\lambda^{i+1} \Rightarrow V_\lambda^j = V_\lambda^{j+1}, j \geq i$$

Da  $V_N$  endlich existiert ein  $i_0$  mit  $V_\lambda^{i_0} = V_\lambda^{i_0+1}$  und es gilt  $V_\lambda = V_\lambda^{i_0}$ .

Es müssen also solange neue  $V_\lambda^i$  berechnet werden, bis keine Veränderungen mehr auftreten.

**[Schritt 2]** Konstruiere  $P'$  mit  $P' := \{ A \rightarrow B'_1 \dots B'_m \mid A \rightarrow B_1 \dots B_m \in P \}$  mit

$$B'_i = \begin{cases} B_i & ; B_i \notin V_\lambda \\ B_i \text{ oder } \lambda ; \text{sonst} & \end{cases}, \text{ aber } B'_1 \dots B'_m \neq \lambda.$$

Mit anderen Worten: lösche alle  $\lambda$ -Produktionen und füge für alle Variablen, die nach  $\lambda$  abgeleitet werden können und auf rechten Regelseiten vorkommen, entsprechende Regeln hinzu, die diese Variablen rechts nicht mehr beinhalten.

Falls  $\lambda \notin L(G)$  (also falls  $S \notin V_\lambda$ ), so setze  $V'_N = V_N$  und  $S' = S$ .

Falls  $\lambda \in L(G)$  (also falls  $S \in V_\lambda$ ), dann sei  $V'_N = V_N \cup \{S'\}$ , wobei  $S'$  ein neues Startsymbol ist, und die Regelmenge  $P'$  sei gleich  $P \cup \{S' \rightarrow S, S' \rightarrow \lambda\}$ .

Typ	Eigenschaft	Automatenmodell
0	Grammatiken ohne Einschränkungen	Turing-Maschine
1	kontextsensitive Grammatiken, monotone Grammatiken für alle Regeln $v \rightarrow w$ gilt $ v  \leq  w $	linear beschränkter Automat
2	kontextfreie Grammatiken für alle Regeln $v \rightarrow w$ gilt: $v$ ist Variable (die Produktionen haben die Form $A \rightarrow w$ )	Kellerautomat
3	reguläre Grammatiken für alle Regeln $v \rightarrow w$ gilt: $v$ ist Variable und $w$ ist entweder ein Terminal oder ein Terminal gefolgt von einer Variable	endlicher Automat



## Fragestellungen: Hierarchiefragen

Was sind natürliche Fragen in diesem Zusammenhang, eine “neue” Sprachklasse  $\mathcal{L}$  betreffend ?

1. Wie ordnet sich  $\mathcal{L}$  im Vergleich mit bekannten Sprachklassen, insbesondere aus der Chomsky-Hierarchie, ein ?
2. Oft werden Hierarchien von Sprachbeschreibungsmechanismen eingeführt; dann erhebt sich die Frage, ob diese Hierarchie auch strikt auf Sprachebene ist, oder welche möglichst genauen Trennergebnisse bewiesen werden können. Manchmal *kollabieren* scheinbare Hierarchien auch.
3. Spezieller gibt es häufig triviale (schwache) Inklusionsbeziehungen, und die Aufgabe besteht darin, die Striktheit der Inklusion nachzuweisen.
4. Ebenso interessant sind *Unvergleichbarkeitsergebnisse* zwischen einander fernstehenden Familien;  $\mathcal{L}_a$  und  $\mathcal{L}_b$  heißen *unvergleichbar*, wenn

$$((\mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}_b) \neq \emptyset) \wedge ((\mathcal{L}_a \setminus \mathcal{L}_b) \neq \emptyset) \wedge ((\mathcal{L}_b \setminus \mathcal{L}_a) \neq \emptyset).$$

**Fragestellungen:** Universalität (Spezialfall der Hierarchiefragen)

Bekanntermaßen dienen sowohl Turing-Maschinen als auch Typ-0-Grammatiken zur Kennzeichnung von  $\mathcal{L}_0$ , sind also — gemäß der Church-Turing-These — *(berechnungs-)universell*.

Wir eine neue Methodik zur Durchführung von Berechnungen vorgeschlagen, so muss man sich fragen, ob hiermit ebenfalls “alles” berechnet werden kann.

Typische “neue” Gebiete in den letzten 15 Jahren waren: Quantencomputing und Biocomputing.

## **Fragestellungen:** Entscheidbarkeitsfragen

Gegeben eine Sprachbeschreibung und / oder Teile der Sprache, soll algorithmisch eine bestimmte Eigenschaft nachgewiesen werden.

**Beispiel:** (Nicht-)Leerheit, (Un-)Endlichkeit: Also: Gegeben z.B. eine Grammatik (aus einem bestimmten fixierten Formalismus), beschreibt diese Grammatik (nicht) eine leere bzw. endliche Sprache ?

Erinnerung an Grundvorlesungen:

**Satz:** Das Endlichkeitsproblem für endliche Automaten ist entscheidbar.

**Satz:** Das Leerheitsproblem für endliche Automaten ist entscheidbar.

Erinnern Sie die Konstruktionen ? Wie “schwierig” sind die Algorithmen ?

## Der Klassiker Das *Wortproblem*

Zwei Varianten: (1) uniform / allgemein oder (2) fixiert / speziell

(1) Ggb.: (z.B.) Grammatik  $G$  und Wort  $w$ , Frage: Gilt  $w \in L(G)$  ?

(2) Gibt es zu vorgelegter Sprache  $L$  einen Algorithmus, der entscheidet, ob die Eingabe  $w$  in  $L$  liegt ?

Anders ausgedrückt fragt (2) danach, ob  $L \in \mathbf{ENT}$  gilt.

(2) lässt sich (oft) durch Beantwortung der Inklusionsfrage  $\mathcal{L} \subseteq \mathbf{ENT}$  beantworten, jedenfalls im positiven Fall und wenn  $L \in \mathcal{L}$  bekannt ist.

Sind gewisse Abschlusseigenschaften (s.u.), insbesondere Schnitt mit einelementigen Sprachen, konstruktiv bekannt, so lässt sich das allgemeine Wortproblem (und damit auch das spezielle) oft positiv lösen über das Leerheitsproblem.

Wie würde dieser Weg aussehen bei den endlichen Automaten ?

Ein unentscheidbares Beispiel liefert das Halteproblem für Turingmaschinen.

## Weitere Entscheidbarkeitsfragen

Insbesondere bei der Betrachtung von Sprachklassen, die “schräg” zur Chomkyhierarchie liegen, sind Fragen der folgenden Bauart von Interesse:

Beschreibt die Grammatikfamilie  $\mathcal{G}$  die “schräge” Sprachklasse  $\mathcal{L}$ , so mag man fragen:

- Gegeben  $G \in \mathcal{G}$ , ist  $L(G)$  vom Typ  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ?
- Gegeben Typ- $i$ -Grammatik  $G$ , ist  $L(G) \in \mathcal{L}$  ?

Wir werden solche Fragen *Typisierungsprobleme* nennen.

Analog zum Wortproblem kann man auch (allgemeine / spezielle) Präfixprobleme, Teilwortprobleme etc. betrachten.

## Abschlusseigenschaften

Diese Fragen zielen auf algebraische Eigenschaften von Sprachfamilien ab.

Eine Sprachklasse  $\mathcal{L}$  ist (u.a.) ein Mengensysteme, und daher ist es natürlich zu fragen, ob  $\mathcal{L}$  gegen gewisse Mengenoperationen abgeschlossen ist.

Beispielsweise bedeutet *Abschluss unter Vereinigung*: Wann immer  $L$  und  $M$  aus  $\mathcal{L}$  sind, so ist auch  $L \cup M$  aus  $\mathcal{L}$ .

Allgemein betrachten wir (Scharen von)  $n$ -stelligen Mengen-Operatoren  $O$  und fragen, ob für beliebige  $o \in O$  und beliebige  $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{L}$  gilt:  $o(L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{L}$ , sofern  $o$  für die Argumente  $L_1, \dots, L_n$  definiert ist..

Einfache weitere Beispiele: Konkatenation und Kleene-Stern.

Spezielle **Abschlusseigenschaften**:

Die regulären Sprachen gelten als besonders grundlegende Sprachfamilie.

Daher untersucht man oft auch, ob eine vorgelegte Sprachfamilie  $\mathcal{L}$  abgeschlossen ist gegen Durchschnitt mit regulären Sprachen,

Wie sieht dies für die Typ- $i$ -Sprachfamilien aus und wie beweist man dies ?

## Kombinatorische Eigenschaften

Zumindest für “einfache” Sprachfamilien lassen sich oft Eigenschaften finden, die Sprachen aus solch einer Sprachfamilie auszeichnen (aber im Allgemeinen nicht kennzeichnen).

**Beispiel:** Die Pumping-Lemmata für reguläre und kontextfreie Sprachen sind kombinatorische Eigenschaften.

Kombinatorische Eigenschaften dienen oft dazu, von gewissen Sprachen zu zeigen, dass sie nicht zu der gerade interessierenden Sprachfamilie gehören. Im Beweisgang nimmt man an, dass (im Widerspruch zur Behauptung) die betrachtete Sprache zur nämlichen Sprachfamilie gehörte, weshalb ihr die bekannte kombinatorische Eigenschaft zukommt. Nun wird gezeigt, dass die betrachtete Sprache eben diese Eigenschaft nicht besitzen kann.

~> Wichtiges Hilfsmittel für Beweis der Striktheit von Inklusionen und von Unvergleichbarkeitsergebnissen.



## **Kombinatorische Eigenschaften:** Normalformen

Normalformen kann man auch als kombinatorische Eigenschaften im weiteren Sinne auffassen.

**Beispiel:** Chomsky-Normalform für kontextfreie Grammatiken; der Beweis der Chomsky NF geht meist über andere (schwächere) Normalformergebnisse

Jedenfalls gestatten solche Normalformen oft vereinfachte Beweisführungen, indem nämlich nur noch Grammatiken in Normalform zu betrachten sind.

Kennen Sie die Greibach-NF für Typ-2 oder die Kuroda-NF für Typ-0 ?

**Lemma:** [Normalform] Zu jeder Typ-i-Grammatik  $G = (V_N, V_T, S, P)$ ,  $i = 0, 1, 2$  existiert eine äquivalente Typ-i-Grammatik  $G' = (V'_N, V_T, S, P')$  mit  $P' \subseteq V'^+_N \times V'^*_N \cup V'_N \times V_T$ .

**Beweisidee:** Führe für jedes Terminal  $a$  in  $G$  eine neue Variable  $\hat{a}$  in  $G'$  ein, die allein  $a$  ableitet. Dann ersetze alle Vorkommen von Terminalen auf rechten Regelseiten durch diese neuen Variablen. Setze  $V'_N := V_N \cup \hat{V}_T$ , wobei  $\hat{V}_T$  ein „neues“ Alphabet sei mit  $\hat{V}_T := \{\hat{a} \mid a \in V_T\}$  und  $\hat{V}_T \cap V = \emptyset$ .

Definiere den Homomorphismus  $\varphi : V^* \rightarrow V'^*_N$  durch  $\varphi(x) := \begin{cases} A & ; x = A \in V_N \\ \hat{a} & ; x = a \in V_T \end{cases}$ .

Setze weiter  $P' := \{\varphi(x) \rightarrow \varphi(y) \mid x \rightarrow y \in P\} \cup \{\hat{a} \rightarrow a \mid a \in V_T\}$ .

Offenbar gilt:  $L(G) = L(G')$ .

Die eine Richtung ist klar:  $v \in L(G) \iff S \Rightarrow^*_G v \iff S \Rightarrow^*_{G'} \varphi(v) \Rightarrow^*_{G'} v$

woraus folgt:  $v \in L(G')$ .

Die andere Richtung ist aufwändiger, tut aber nichts zum Verständnis.

**Lemma:** [links-/rechtslineare Grammatiken] Zu jeder linkslinearen Grammatik  $G$  existiert eine äquivalente rechtslineare Grammatik  $G'$  mit  $L(G) = L(G')$ . Ebenso gibt es zu jeder rechtslinearen Grammatik eine äquivalente linkslineare.

**Beweis:** Es sei  $G = (V_N, V_T, S, P)$  eine linkslineare Grammatik mit  $P \subseteq V_N \times V_N V_T^* \cup V_N \times V_T^*$ . Setze

$V'_N := V_N \cup \{S'\}$ ,  $S'$  neues Symbol, und

$P' := \{S' \rightarrow wA \mid A \rightarrow w \in P, w \in V_T^*\} \cup \{B \rightarrow wA \mid A \rightarrow Bw \in P\} \cup \{S \rightarrow \lambda\}$ .

Dann ist  $G' := (V'_N, V_T, S', P')$  äquivalent zu  $G$ , denn gilt in  $G$

$S \Rightarrow_G^1 A_1 w_1 \Rightarrow_G^1 A_2 w_2 w_1 \Rightarrow_G^* A_{n-1} w_{n-1} \dots w_2 w_1 \Rightarrow_G^1 w_n \dots w_1$ , so gilt in  $G'$

$S' \Rightarrow_{G'}^1 w_n A_{n-1} \Rightarrow_{G'}^1 w_n w_{n-1} A_{n-2} \Rightarrow_{G'}^* w_n w_{n-1} \dots w_1 S \Rightarrow_{G'}^1 w_n w_{n-1} \dots w_1$ .

Entsprechendes gilt auch für die Umkehrung.

## Quintessenz

Die Lemmata stellen sicher, daß wir o.B.d.A. davon ausgehen können, dass im folgenden betrachtete Grammatiken in Normalform vorliegen, d.h., die Produktionen von haben die Form

$A_1 \dots A_n \rightarrow B_1 \dots B_m$ ,  $A_i, B_i$  Nonterminale,  $n > 0$ ,  $m \geq 0$  bzw.  
 $A \rightarrow a$ ,  $A$  Nonterminal,  $a$  Terminal, (oder sie sind linkslinear).

**Was haben wir davon ?**

z.B.: erleichterte Beweise für Abschlusseigenschaften

**Satz:** [Abgeschlossenheit] Jedes  $\mathcal{L}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , ist abgeschlossen unter den *regulären Operationen*  $\cup$  (Vereinigung),  $\circ$  (Konkatenation),  $*$  (Kleene-Stern) und enthält die Familie FIN der endlichen Sprachen.

**Beweis:**  $G := (V_N, V_T, S, P)$  und  $G' := (V'_N, V'_T, S', P')$  seien Typ- $i$ -Grammatiken in Normalform. O.B.d.A. gelte  $V_N \cap V'_N = \emptyset$ .\*

(1) Vereinigung

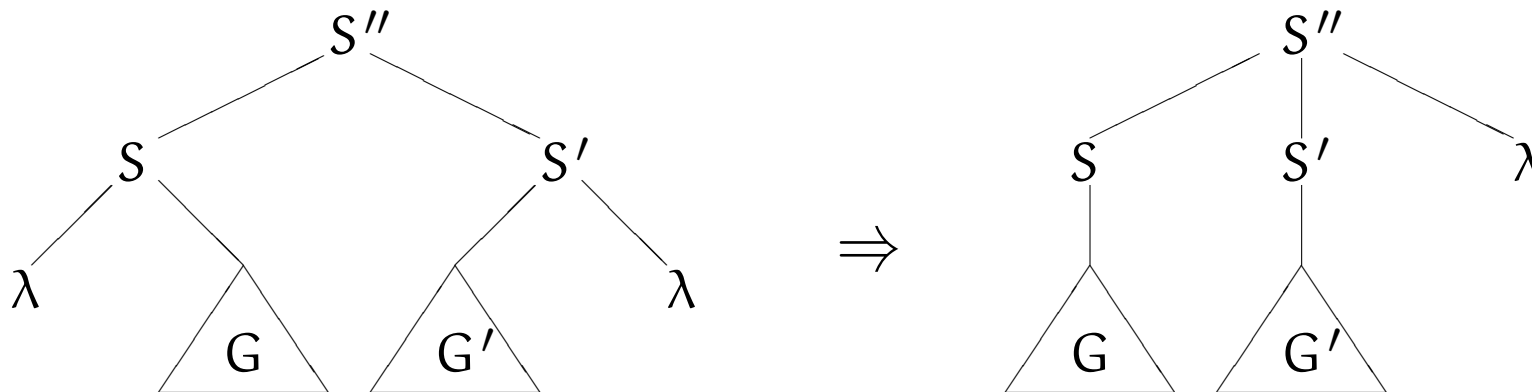
- $i \neq 1$ :  $L(G) \cup L(G')$  wird von der Grammatik  $G'' := (V_N \cup V'_N \cup \{S''\}, V_T \cup V'_T, S'', P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S'\})$  erzeugt, denn

$$x \in L(G) \cup L(G') \iff S \Rightarrow_G^* x \vee S' \Rightarrow_{G'}^* x \iff S'' \Rightarrow_{G''}^* x.$$

\*Dies kann z.B. durch „Markieren“ der Nonterminale geschehen, also durch das Bilden von Kreuzprodukten  $(a, 1)$ ,  $a \in V_N$  bzw.  $(b, 2)$ ,  $b \in V'_N$ .

- $i = 1$ : Problem: falls  $P$  oder  $P'$  die Regel  $S \rightarrow \lambda$  bzw.  $S' \rightarrow \lambda$  enthält (also wenn gilt  $\lambda \in L(G) \cup L(G')$ ), so ist das so definierte  $G''$  keine Typ-1-Grammatik.

Dann setze  $P'' := (P \setminus \{S \rightarrow \lambda\}) \cup (P' \setminus \{S' \rightarrow \lambda\}) \cup \{S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S', S'' \rightarrow \lambda\}$ .



## (2) Konkatenation

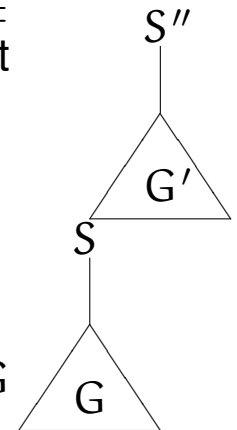
Wir werden im folgenden Vorlesungsteil sehen, dass der Konkatenationsabschluss hier nicht explizit gezeigt werden müsste aufgrund des Abschlusses der Typ-i-Sprachen unter Vereinigung, Stern und den Trio-Operationen.

Bitte verfolgen Sie dennoch den anschließend angegebenen expliziten Beweisgang, der sehr ähnlich zu dem der Vereinigung erfolgt.

$i = 3$ :  $G'' := \{V_N \cup V'_N, V_T \cup V'_T, s', P \cup \{A' \rightarrow Sw \mid A' \rightarrow w \in P', w \in V_T^*\} \cup \{A' \rightarrow B'w \mid A' \rightarrow B'w \in P'\}$  ist Typ-3-Grammatik und erzeugt  $L(G) \circ L(G')$ :

- $$\left. \begin{array}{l} S' \Rightarrow_{G'}^* w_2 \iff S' \Rightarrow_{G''}^* Sw_2 \\ S \Rightarrow_G^* w_1, \text{ also } S' \Rightarrow_{G''}^* w_1w_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L(G) \circ L(G') \subseteq L(G'')$$
- $$\left. \begin{array}{l} S' \Rightarrow_{G''}^* v, \text{ also } S' \Rightarrow_{G''}^* Sv_2 \Rightarrow_{G''}^* v_1v_2 = v \\ \Rightarrow v_1 \in L(G), v_2 \in L(G') \end{array} \right\} \Rightarrow L(G'') \subseteq L(G) \circ L(G')$$

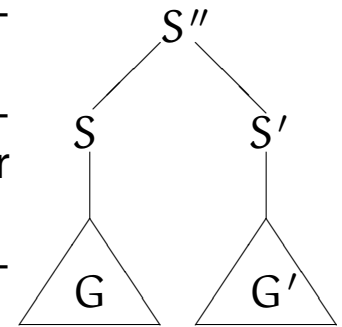
Zunächst wird also das Teilwort aus  $G'$  abgeleitet, dann das Teilwort aus  $G$  („sequentiell“).



$i = 0, 2$ :  $G'' := (V_n \cup V'_N \cup \{S''\}, V_T \cup V'_T, S'', P \cup P' \cup \{S'' \rightarrow SS'\})$  ist Typ- $i$ -Grammatik und erzeugt  $L(G) \circ L(G')$ .

Es wird gleichzeitig das Teilwort aus  $G$  und das Teilwort aus  $G'$  erzeugt („parallel“). Im Fall  $i = 0$  können keine Interferenzen zwischen linker und rechter Teilableitung entstehen, da  $V_N \cap V'_N = \emptyset$  und  $G, G'$  in Normalform.

Im Fall  $i = 2$  gibt es diese Probleme offensichtlich nicht, da die linken Regel-seiten nur ein Nichtterminal enthalten (und die sind in  $G$  und  $G'$  disjunkt).



- $i = 1$ :

Fall 1:  $\lambda \notin L(G) \cup L(G')$

Also gilt weder  $S \rightarrow \lambda \in P$  noch  $S' \rightarrow \lambda \in P'$ .

Dann funktioniert die Konkatination wie im Fall  $i = 0$ .

Fall 2:  $\lambda \in L(G), \lambda \notin L(G')$

$L(G) \circ L(G') = (L(G) \setminus \{\lambda\}) \circ L(G') \cup L(G')$ .

$P'' := (P \setminus \{S \rightarrow \lambda\}) \cup P' \cup \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S'\}$

Fall 3:  $\lambda \notin L(G), \lambda \in L(G')$

$L(G) \circ L(G') = L(G) \circ (L(G') \setminus \{\lambda\}) \cup L(G)$ .

$P'' := P \cup (P' \setminus \{S' \rightarrow \lambda\}) \cup \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S\}$



Fall 4:  $\lambda \in L(G), \lambda \in L(G')$

$$L(G) \circ L(G') = (L(G) \setminus \{\lambda\}) \circ (L(G') \setminus \{\lambda\}) \cup (L(G) \setminus \{\lambda\}) \cup (L(G') \setminus \{\lambda\}) \cup \{\lambda\}$$

$$P'' := (P \setminus \{S \rightarrow \lambda\}) \cup (P' \setminus \{S' \rightarrow \lambda\}) \cup \{S'' \rightarrow SS', S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow S', S'' \rightarrow \lambda\}$$

### (3) Kleene'sche Hülle<sup>†</sup>

- $i = 3$ :  $G'' := (V_N \cup \{S''\}, V_T, S'', P'' := P \cup \{S'' \rightarrow \lambda, S'' \rightarrow S\} \cup \{A \rightarrow Sw \mid A \rightarrow w \in P, w \in V_T^*\})$  ist eine Typ-3-Grammatik und erzeugt  $L(G)^*$ .
- $i = 2$ :  $G'' := (V_N \cup \{S''\}, V_T, S'', P'' := P \cup \{S'' \rightarrow \lambda, S'' \rightarrow S''S\})$  ist eine Typ-2-Grammatik und erzeugt  $L(G)^*$ .

<sup>†</sup>Insbesondere hier ist es lehrreich sich klarzumachen, warum für die einzelnen Klassen der Chomsky-Hierarchie unterschiedliche Konstruktionen angegeben werden. **Konkrete Frage:** Warum könnte die Typ-2-Konstruktion bei Typ-1 fehlschlagen?

- $i = 0, 1: G'' := (V_N \cup \{S'', \hat{S}\}, V_T, S'', P'' := \tilde{P} \cup \{S'' \rightarrow \lambda, S'' \rightarrow S, S'' \rightarrow \hat{S}S\} \cup \{\hat{S}a \rightarrow Sa, \hat{S}a \rightarrow \hat{S}Sa \mid a \in V_T\})$ , wobei  $\tilde{P} = P$  im Falle  $i = 0$  und  $\tilde{P} = P \setminus \{S \rightarrow \lambda\}$  im Falle  $i = 1$ ;

(a)  $L(G)^* \subseteq L(G'')$

$$S'' \Rightarrow_{G''}^1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ entspricht } (L(G))^0 \\ S \text{ erzeugt } (L(G))^1 \\ \hat{S}S \Rightarrow_{G''}^* \hat{S}L(G) \Rightarrow_{G''}^1 \left\{ \begin{array}{l} SL(G) \text{ erzeugt } (L(G))^2 \\ \hat{S}SL(G) \Rightarrow_{G''}^1 \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(b)  $L(G'') \subseteq L(G)^*$

Der entsprechende formale Beweis würde weitere 2-3 Folien beanspruchen und sei hier "gespart".

Es bleibt noch zu zeigen:  $\text{FIN} \subseteq \mathcal{L}_i$ .

Wegen der bekannten Chomsky-Hierarchie und der Abgeschlossenheit gegenüber regulären Operationen genügt es zu zeigen, daß  $\{\lambda\} \in \mathcal{L}_3$ ,  $\emptyset \in \mathcal{L}_3$  und  $\{a\} \in \mathcal{L}_3$  für alle  $a$  aus einem terminalen Grundvorrat, denn wenn  $L \in \text{FIN}$ , dann  $L = \emptyset$  oder  $L = \{\lambda\} \cup F$  oder  $L = F$ , wobei  $F$  eine nichtleere endliche Menge ist mit  $\lambda \notin F$ .

Setze  $F := \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $v_i := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{m(i)}}$ ,  $m(i) := |v_i|$ ,  $a_{i_j} \in V_T$ , dann ist

$$F = \{a_{1_1}\} \circ \{a_{1_2}\} \circ \dots \circ \{a_{1_{m(1)}}\} \cup \{a_{2_1}\} \circ \{a_{2_2}\} \circ \dots \circ \{a_{2_{m(2)}}\} \cup \dots \cup \{a_{k_1}\} \circ \{a_{k_2}\} \circ \dots \circ \{a_{k_{m(k)}}\}.$$

Es gilt:  $\emptyset = L(\{\{S\}, \{a\}, S, \emptyset\})$ ,

$\{\lambda\} = L(\{\{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow \lambda\}\})$  und

$\{a\} = L(\{\{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow a\}\})$ .

## **Kombinatorische Eigenschaften:** Beschreibungskomplexität

Bei diesem Teilgebiet der Formalen Sprachen geht es darum herauszubekommen, wie weit man die “Ressourcen” beschränken kann, ohne die Beschreibungsmächtigkeit insgesamt zu verringern.

Man kann natürlich auch Sprachklassen betrachten, die sich durch solche eingeschränkten Ressourcen definieren.

Typische Ressourcen sind: # Nichtterminale, # Regeln, . . .

Mit dem Komplexitätsmaß “maximale Länge einer rechten Seite einer Regel” lässt sich die Chomsky-NF für Typ-2 auch als Beschreibungskomplexitätsergebnis lesen.

Wie lautet so ein Ergebnis im Detail ?

Es gibt auch nette Bezüge zur Berechnungs-Komplexität.

## Algorithmische Aspekte

(Fast) alle bislang besprochenen Fragestellungen an Formale Sprachen (Sprachfamilien, Grammatikfamilien) lassen sich algorithmisch beantworten, d.h., es gibt einen Lösungsalgorithmus für das genannte Problem.

~> Frage nach der Komplexität der Fragestellung

**Beispiel:** Das Nichtleerheitsproblem für endliche Automaten entspricht offenbar der Frage nach der Existenz eines Pfades von dem Startzustand im Automatengraphen zu einem der Endzustände. Welche Algorithmen kennen Sie hierfür (aus anderen Vorlesungen) ? Mit welchem Platz kommt man aus ?

Man kann aber auch gänzlich andere algorithmische Fragen stellen, z.B. die nach der automatischen Lernbarkeit von Sprachfamilien (unter unterschiedlichen Modellannahmen). **Vorlesung Lernalgorithmen**

## Grundprobleme bei Sprach- und Grammatikfamilien & ihre Komplexitäten

	Typ 3	Typ 2	Typ 1	Typ 0
$\in$	$NC^1$	$SAC^1$	PSPACE	unentsch.
$\emptyset$	$N\mathcal{L}$	P	unentsch.	unentsch.
$\equiv$	PSPACE	unentsch.	unentsch.	unentsch.

**ACHTUNG** (nochmals):

Lesen Sie diese Tabelle (u.ä. aus der Literatur) “geeignet”, d.h., unter Zugrundelegung “vernünftiger” Sprachbeschreibungsmechanismen.

Vorlesung Komplexitätstheorie

## Literatur

... gibt es zu diesem Thema natürlich zuhauf.

### Formale Sprachen allgemein

Die klassischen Lehrbücher über formale Sprachen (insbesondere die älteren Ausgaben...) enthalten viel von dem hier behandelten Stoff:

J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Reading (MA): Addison-Wesley, 1979.

A. K. Salomaa. *Formal Languages*. Academic Press, 1973.

(Hierzu gibt es auch jeweils deutschsprachige Ausgaben.)

Eine aktuelle(re) Übersicht über Formale Sprachen insgesamt liefert:

G. Rozenberg and A. Salomaa, editors. *Handbook of Formal Languages (3 volumes)*. Springer, 1997.

### **Über regulierte Ersetzungsverfahren:**

Der “Klassiker” ist immer noch:

J. Dassow and Gh. Păun. *Regulated Rewriting in Formal Language Theory*, volume 18 of *EATCS Monographs in Theoretical Computer Science*. Springer, 1989.

Eine kürzere und aktuellere Fassung finden Sie in:



Genauer: J. Dassow, Gh. Păun, and A. Salomaa. Grammars with controlled derivations. In Rozenberg and Salomaa (1997, Band II), Seiten 101–154.

### **Über parallele Ersetzungsverfahren:**

Die drei klassischen Texte aus dem Bereich der Lindenmayer-Systeme sind:

G. T. Herman and G. Rozenberg. *Developmental Systems and Languages*. Amsterdam: North-Holland, 1975.

G. Rozenberg and A. K. Salomaa. *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, 1980.

P. M. B. Vitányi. Lindenmayer systems: Structure, languages, and growth functions. Technical Report 96, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1980.

Sehr hübsche Beispiele aus dem Bereich der Computergraphik enthält:

P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer, 1990.

Um der Idee, Ihnen möglichst auch aktuelle Forschungsimpulse zu liefern, besser zu folgen, orientiere ich mich aber wesentlich an:

H. Fernau. Parallel grammars: A phenomenology. *GRAMMARS*, 6:25–87, 2003.

Wann immer für nötig befunden, ziehe ich weitere (Zeitschriften-)Literatur zu Rate.