Henning Fernau / Daniel Meister
Universität Trier

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik 1

Aufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 11.05.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Aufgabe 1 (Knobelaufgaben) (5+5 Punkte)

Im Modul "Knobeln" beim Matheprisma,
`http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Knobeln/index.htm`
werden folgende Regeln formuliert, die beim Ausfüllen von Tabellen zu "Logeleien" helfen sollen:

> Wenn von drei Aussagen genau eine richtig ist, dann kann man,
> wenn man diese kennt, die beiden anderen ausschließen,
> wenn man die beiden kennt, die nicht richtig sind, auf die Aussage schließen.
> Dieses mathematische Gesetz gilt nicht nur für drei Aussagen, sondern für beliebig viele.

1. Begründen Sie die Richtigkeit dieser Argumentation. Formalisieren Sie die Argumentation dazu zunächst einmal.

2. Beschäftigen Sie sich intensiver mit diesen Knobeleien und lösen Sie die angegebene, im Folgenden wiederholte "Schulaufgabe":

> Es ist Punkt zwölf Uhr – Mitternacht. Die drei Gespenster Green Spuk, Red Spuk und Yellow Spuk geistern durch die Schule am Siegelberg. Ein paar Kinder kennen diese drei netten Gespenster und haben ihnen nach der letzten Karnevalsfeier Haarfärbemittel auf das Pult gelegt. Das hat den dreien Riesenspaß gemacht, sich die Haare rot, grün oder gelb zu färben. Doch was liegt denn heute da? Das darf ja wohl nicht wahr sein! Es liegen drei Lollis auf dem Pult! Ein roter, ein gelber und ein grüner Lolli. Natürlich fangen die drei sofort an, die Lollis zu lutschen. Keiner hat sich den Lolli passend zu seiner Haarfarbe genommen. Plötzlich sieht Green Spuk das Spiegelbild der Gespenster auf dem Computermonitor. Ihm fällt auf: "Ich habe die Haarfarbe passend zum Namen, und einen gelben Lolli!" Das Gespenst mit den gelben Haaren ruft: "Und ich bin nicht Red Spuk!"

Welches Gespenst lutscht welchen Lolli und hat welche Haarfarbe?

Aufgabe 2 (Induktion) (6 Punkte)

Wir haben schon desöfteren Schreibweisen der Form $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$ verwendet, wobei die p_i Aussagen seien. Dabei haben wir offenkundig die Klammern weggelassen, denn streng genommen ist ja das "Oder" ein zweistelliger Operator. Ist das zulässig? Dazu müssen wir zunächst erstmal wieder genügend viele Klammern einführen.
Das kann man auf mindestens zwei verschiedene Arten und Weisen tun:
(1) Ein Ausdruck A heißt *Linksklammerung* zu $B = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ gdw.
(a) $n = 1$ und $A = B$ oder
(b) $n \geq 2$, $A = (A' \vee p_n)$, wobei A' Linksklammerung zu $B' = \bigvee_{i=1}^{n-1} p_i$ ist.
(2) Entsprechend heiße ein Ausdruck A heißt *Rechtsklammerung* zu $B = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ gdw.
(a) $n = 1$ und $A = B$ oder
(b) $n \geq 2$, $A = (p_1 \vee A')$, wobei A' Rechtsklammerung zu $B' = \bigvee_{i=1}^{n-1} p_{i+1}$ ist.

Beweisen Sie mithilfe eines Induktionsbeweises, bei dem Sie das Assoziativgesetz für die Disjunktion (also zweistelligen Operator) voraussetzen dürfen, d.h. $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$ für beliebige Aussagen p, q, r, die folgende Behauptung:
Für alle $n \geq 1$ gilt:
Ist A_l Linksklammerung und A_r Rechtsklammerung zu $B = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$, so gilt: $A_l \equiv A_r$.

Mithin dürfen wir die Schreibweise $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$ verwenden.

Aufgabe 3 (Induktion) (6 Punkte)

Beweisen Sie die Richtigkeit des Schließens über "vollständige Fallunterscheidung" mithilfe eines Induktionsbeweises. Formaler bedeutet dies das Folgende:
Es seien $p_1, \ldots, p_n, p$ Aussagen.
Angenommen, $\bigvee_{i=1}^{n} p_i$ ist wahr, und es gelte ferner: $p_i \implies p$ für $1 \leq i \leq n$.
Dann ist p wahr.
Noch formaler behaupten wir also:

$$\left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (p_i \implies p) \right) \right) \implies p$$