

Übungen zur Vorlesung
Grundlagen der Theoretischen Informatik 1
Aufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 18.05.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Aufgabe 1 (Mächtigkeit und Induktion) (1+6+6 Punkte)

Die *Mächtigkeit* $|\cdot|$ einer endlichen Menge sei wie folgt festgelegt:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ |B| + 1, & \text{falls } A = B \cup \{x\} \text{ mit } x \notin B \end{cases}$$

$|\cdot|$ ordnet also jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl zu.

1. Zeigen Sie durch Angabe der einzelnen Rechenschritte, wieso $|\{3, 5, 1, 7\}| = 4$ gilt.
2. Zeigen Sie durch Induktion über $|B|$:
Für alle endlichen Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

3. Zeigen Sie durch Induktion über $|B|$:
Für alle endlichen Mengen A und B gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Hierbei dürfen Sie die Aussage aus dem letzten Punkt voraussetzen.

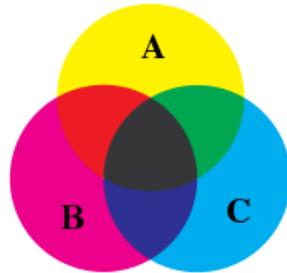
Aufgabe 2 (Mengenbeziehungen) (4 Punkte)

Beweisen Sie durch elementweise Argumentation für bel. Mengen A und B :

$$((A \cup B) = (A \cap B)) \implies A = B.$$

Aufgabe 3 (Venn-Diagramme) (3+(2+2)+3 Punkte)

- Stellen Sie die folgenden Mengen als Venn-Diagramme dar.
 1. $\overline{(A \cup B)} \cap C$
 2. $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cup C) \cap B)$
 3. $(A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus (A \setminus C))$
- Untersuchen Sie anhand von Venn-Diagrammen, welche Eigenschaften Sie für Mengen vermuten, für die $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B$ gilt.
 1. Notieren Sie zwei Ihrer Vermutungen formal.
 2. Beweisen oder widerlegen Sie eine Ihrer Vermutungen.
- Betrachten Sie das unten stehende Venn-Diagramm für die Verhältnisse zwischen drei Mengen A , B und C . Finden Sie möglichst einfache mengentheoretische Ausdrücke für die folgenden Bereiche:
 1. X = “Alles Gelbe, Grüne und Hellblaue.”
 2. Y = “Alles hellrote, Dunkelblaue und Grüne.”
 3. Z = “schwarz.”



Für Venn-Diagramme gibt es auch nette Applets, siehe z.B.

<http://www.cut-the-knot.org/LewisCarroll/VennClick.shtml>