Henning Fernau / Daniel Meister
Universität Trier

Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik 1

Aufgabenblatt 5

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 25.05.2011, 12 Uhr
im Kasten für "GTI 1" vor Raum H426

Wir betrachten in den ersten beiden Aufgaben die folgenden sechs Mengen:

- $A_1 = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x\}$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation bezeichnet.
- $A_2 = \{y : (y \in \mathbb{Z}) \wedge (3|y)\}$.
- $A_3 = A_1 \cap A_2$.
- $A_4 = \mathbb{Z} \setminus (A_1 \cup A_2)$.
- A_5 ist die Menge aller ganzen Zahlen, welche bei der Division durch die Zahl 6 den Rest 3 lassen.
- $A_6 = \{x \in \mathbb{Z} : x + 3 \in A_5\}$.

Aufgabe 1 (Mengenbeschreibungen) (5+2 Punkte)

1. Es sei nun $B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 6\}$, wobei $|z|$ den Betrag der Zahl z angibt. Es sei ferner $B_i = A_i \cap B$ für $1 \leq i \leq 6$. Geben Sie für $2 \leq i \leq 6$ die endlichen Mengen B_i durch Auflistung ihrer Elemente an. Beispielsweise gilt:

$$B_1 = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}.$$

2. Geben Sie zur Verdeutlichung der mengentheoretischen Beziehungen der Mengen B_i zueinander ein Hasse-Diagramm für diese 6 Mengen an.

Aufgabe 2 (Mengenbeschreibungen) (3+2+3+3 Punkte)

1. Finden Sie ein Paar $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $A_i \subset A_j$.

2. Finden Sie ein Paar $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. Finden Sie ein Paar $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $A_i \setminus A_j \neq \emptyset$, $A_j \setminus A_i \neq \emptyset$.
4. Finden Sie ein Paar $(i, j) \in (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \setminus \Delta_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ mit $A_i = A_j$.

Geben Sie bei allen Teilaufgaben auch jeweils eine Begründung an (kurzer Beweis). Für die bloße Angabe eines Indexpaares gibt es jeweils höchstens einen Punkt.

Aufgabe 3 (Relationen) (3+(1+2+2+1) Punkte)

1. Beweisen Sie durch für beliebige Relationen $R, S, T \subseteq M \times M$ das folgende Subdistributivitätsgesetz:
$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T).$$
2. Betrachten Sie konkret $M = \mathbb{N}$ sowie die Relationen
$$R = T = \{(i, j) : \exists n \in \mathbb{N}(i = 3n \wedge j = 3(n + 1))\},$$
$$S = | \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \text{ also } S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i|j\}.$$
   - Es sei $B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 10\}$.
     Welche Elemente enthält $(R \cap (B \times \mathbb{N})) \setminus (R \cap (B \times B))$?
   - Beschreiben Sie möglichst knapp die Relationen $R \cap S$ und $(R \cap S) \circ T$.
   - Beschreiben Sie in Worten die Relationen $R \circ T$ und $S \circ T$.
   - Ist in diesem Fall das angegebene Subdistributivitätsgesetz mit Gleichheit erfüllt? (Kurzes Argument genügt.)